



Academia de Ciencias de la Región de Murcia

Geometría y curvatura. Una aproximación al estudio de la geometría diferencial de superficies

Discurso de ingreso leído por el Académico Electo

Ilmo. Sr. Dr. Luis J. Alías Linares

en el acto de la Sesión Solemne de Toma de Posesión
como Académico de Número celebrado
el día 13 de noviembre de 2017

Y discurso de contestación del Académico de Número

Ilmo. Sr. Dr. Pascual Lucas Saorín



Este discurso se ha impreso con subvención de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, a quien agradecemos su ayuda.

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y ss. del Código Penal).

© Academia de Ciencias de la Región de Murcia, 2017

© Luis J. Alfas Linares

I.S.B.N.: 978-84-697-7242-3

Depósito Legal: MU 1276-2017

Imprime: Compobell S.L., Murcia

**Discurso de ingreso del
Académico Electo
Dr. Luis J. Alías Linares**

Geometría y curvatura. Una
aproximación al estudio de la
geometría diferencial de superficies

Luis J. Alías Linares

El autor agradece a la profesora M. Ángeles Hernández Cifre la ayuda prestada en la realización de las figuras que ilustran estas notas y al profesor Pascual Lucas Saorín el diseño del formato final del texto. Así mismo, agradece a la profesora Alma L. Albuje Brotons, a Verónica López Cánovas y a Eva Alarcón Díaz la ayuda prestada en la revisión de este trabajo y las sugerencias y correcciones realizadas. En cualquier caso, la versión final del mismo, con sus posibles errores o incorrecciones, es responsabilidad única del autor.

Índice general

Presentación	9
Introducción	13
Los conceptos de superficie y curvatura	17
¿Qué es una superficie?	17
Curvatura de una curva plana	22
Curvatura de una superficie	27
Curvaturas seccionales	29
Curvaturas principales	32
Curvatura media y curvatura de Gauss	34
Dos resultados clásicos	41
El teorema de Bernstein	41
El teorema de Alexandrov	45

La posibilidad de explorar otros mundos	51
Superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski	55
Nuestra primera incursión en la investigación matemática	57
Superficies maximales. El teorema de Calabi-Bernstein	61
Nuestra contribución al teorema de Calabi-Bernstein . .	64
Superficies de curvatura media constante	67
Superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski	67
Superficies con borde en el espacio euclídeo	69
El principio del máximo de Omori-Yau	73
Bibliografía	79

Presentación

Excelentísimo Señor Presidente
Ilustrísima Señora Secretaria
Ilustrísimos Académicos
Excelentísimas e Ilustrísimas Autoridades
Señoras y Señores
Queridos amigos

Es para mí un auténtico honor y una gran satisfacción estar aquí hoy para formalizar mi toma de posesión como Académico Numerario de la Academia de Ciencias de la Región de Murcia. Reconocimiento éste que recibo con enorme orgullo y sincero agradecimiento.

Agradecimiento en primer lugar hacia la Academia de Ciencias de la Región de Murcia y, en particular, a los ilustres académicos que han impulsado y apoyado mi candidatura, por haber depositado en mí la responsabilidad de formar parte de esta insigne institución y de unirme a la prestigiosa lista de sus Académicos Numerarios. Esta distinción supone para mí un inmenso orgullo, y la asumo con la responsabilidad y el compromiso que de mí cabe esperar.

No sería justo por mi parte omitir en este capítulo de agradecimientos una mención expresa a mis maestros, que me llevaron de la mano y supieron guiarme en mis primeros pasos por este

difícil mundo de la investigación matemática. Ellos fueron quienes me introdujeron en esta apasionante aventura y, en gran medida, ellos son los culpables de que hoy estemos aquí, los doctores Ángel Ferrández y Pascual Lucas, de la Universidad de Murcia, mis directores de tesis en aquel entonces e impulsores hoy de mi ingreso en esta noble institución.

Así mismo, debo agradecer también a mis amigos y colaboradores con los que, a lo largo de todos estos años, he tenido la oportunidad de trabajar y establecer una fructífera cooperación científica que me ha permitido crecer como persona y como matemático. En especial, a los doctores Alfonso Romero y Miguel Sánchez, de la Universidad de Granada, quienes contribuyeron de manera decisiva en mi formación predoctoral; al doctor Bennett Palmer, hoy en la Universidad del Estado Idaho en Estados Unidos, responsable de mi etapa de formación posdoctoral en la Universidad de Durham, en el Reino Unido; a mis colegas y amigos de la Universidad Federal del Ceará en Fortaleza, Brasil, representados en la figura del doctor Gervasio Colares quien, a sus 86 años de edad continúa trabajando con la misma pasión y entrega de siempre; al doctor Marcos Dajczer, del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA) en Rio de Janeiro, colaborador habitual de nuestro grupo; al doctor Marco Rigoli, de la Universidad de Milán en Italia, quien me enseñó los secretos del principio del máximo de Omori-Yau, y a tantos otros colegas y amigos con los que he tenido la suerte y el placer de colaborar a lo largo de todos estos años.

Igualmente, debo expresar mi agradecimiento a mis compañeros y amigos del grupo de investigación de Geometría Diferencial y Convexa de la Universidad de Murcia, por haber contribuido de manera decisiva a la consolidación de mi carrera profesional e investigadora. Sin todos ellos hoy no estaríamos aquí. Gracias de todo corazón.

Como he dicho al comienzo de mis palabras, me siento enormemente orgulloso del nombramiento académico con que se me distingue. Y me siento orgulloso, especialmente, como matemático. Los matemáticos no estamos acostumbrados a este tipo de reconocimientos, y la investigación en Matemáticas es, para desánimo de los que a ella nos dedicamos, una gran desconocida, no sólo por el público en general sino también en el ámbito universitario y científico en el que desarrollamos nuestro trabajo. Preguntas como *¿Qué se puede investigar en un tema en el que todo está hecho?* o *Pero...¿dos y dos no son cuatro?* son, por desgracia, comunes cuando manifestamos nuestra condición de *investigador matemático*. El público entiende que se investigue en Medicina, en Biología, en Química, en Física, y en otras disciplinas científicas en donde *¡queda tanto por descubrir!* Pero...*¿qué se puede investigar en un tema muerto como las Matemáticas?* Nada más lejos de la realidad.

Las Matemáticas no son ni mucho menos un tema muerto, sino que están en continuo proceso de construcción y desarrollo. No en vano, muchos de los avances tecnológicos más recientes no habrían sido posibles sin su correspondiente fundamentación matemática y, aunque no seamos conscientes de ello, las Matemáticas están casi permanente presentes en nuestra vida cotidiana. Las Matemáticas son difíciles y muchas veces áridas, es verdad. Pero también son bellas y pueden ser entretenidas, y nosotros, como matemáticos, tenemos la obligación de que la sociedad sea consciente de ello. Porque la sociedad necesita de las Matemáticas.

Para terminar, y antes de comenzar mi discurso, me gustaría dedicar unas palabras a mi familia. Por una parte a mis padres, ambos profesores de la Universidad de Murcia, que desde pequeño me enseñaron el valor del trabajo bien hecho y el mérito del esfuerzo. Siempre recordaré con cariño las palabras de aliento de mi padre, en el verano de 1993, cuando yo me encontraba plenamente inmerso en la última fase de la redacción de mi tesis

doctoral. Yo únicamente quería que mi tesis *fuera la mejor*. "*Mira Luis*", me dijo mi padre, "*si Dios quiere, sólo espero que tu tesis sea el peor trabajo de investigación que hagas, porque eso significará que has sabido progresar y avanzar en el mundo de la investigación*". Los últimos diez años de su vida coincidieron con la eclosión de mi carrera docente y universitaria y, postrado e impedido desde el lecho de su cama, me vio progresar desde mi humilde plaza de profesor ayudante hasta la cátedra de Geometría y Topología que ocupó desde hace más de trece años. Su sufrimiento diario me dio fuerzas para llegar adonde he llegado y le estaré siempre agradecido por todo cuanto me enseñó. Hoy, por desgracia, él no puede estar en esta ceremonia, pero me consta que, allí donde descansa, está orgulloso de su hijo. Y por otra parte a mi mujer, Carmela, a mis hijas, Carmela, Esperanza y Aurora, y a mi hijo Luisito. Vosotros sois la luz de mi vida y los sufridores de mi pasión por las Matemáticas. Gracias por comprenderme y apoyarme.

Introducción

En este discurso de ingreso me gustaría reflejar la evolución natural de lo que ha sido mi trayectoria investigadora a lo largo de ya más de veinticinco años en el campo de la geometría diferencial y, más concretamente, en el ámbito de la geometría de subvariedades y del análisis geométrico. A este respecto, mi introducción en el mundo de la investigación matemática, a principios de los años noventa, se llevó a cabo bajo la dirección y orientación de los profesores Ángel Ferrández y Pascual Lucas, de la Universidad de Murcia, quienes, en aquel entonces, me brindaron la oportunidad de iniciarme en esta apasionante y no siempre agradecida tarea, y quienes hoy avalan mi ingreso como académico numerario en esta insigne Academia de Ciencias de la Región de Murcia.

En esa primera etapa de mi formación investigadora, que culminó con la realización de mi tesis doctoral [7], nuestro interés se centró en estudiar ciertos problemas de caracterización y clasificación de *subvariedades no degeneradas*, y en particular de *superficies* e *hipersuperficies*, isométricamente inmersas en espacios *pseudo-riemannianos* de curvatura constante. Nuestra perspectiva se encontraba enmarcada dentro de la llamada teoría de *subvariedades de tipo finito*, una teoría creada y desarrollada a mediados de los años ochenta por el matemático americano de origen taiwanés Bang Yen Chen [29], profesor de la Universidad del Estado de Michigan, y que se reveló como una interesante y útil herra-

mienta en el estudio de problemas relacionados con la descomposición espectral de las inmersiones de subvariedades en términos de las funciones propias de su operador *laplaciano* y, en definitiva, con ciertas ecuaciones diferenciales que se expresan en términos de dicho operador actuando sobre las funciones coordenadas de la subvariedad.

Es interesante señalar que las distintas ecuaciones allí consideradas, así como otros tipos de condiciones y ecuaciones que surgieron en el desarrollo de nuestro trabajo de tesis doctoral, resultaron ser todas ellas condiciones de *curvatura media constante* y en todas ellas aparecían las superficies y, más generalmente, las hipersuperficies de *curvatura media cero* como soluciones particulares, y muchas veces triviales, de nuestro problema. Por otra parte, pudimos comprobar cómo tanto la familia de superficies e hipersuperficies de curvatura media constante como, en particular, las de curvatura media cero, eran lo suficientemente amplias e importantes como para dedicarles una atención especial. Así mismo, pudimos constatar el interés y la importancia de la geometría de Lorentz en la teoría de la relatividad de Einstein y el papel fundamental que desempeñaban las superficies y, en general, las subvariedades espaciales en los espacios de Lorentz. Todo ello motivó nuestro interés por estudiar y profundizar en este tipo de objetos geométricos, dando a mi investigación un enfoque diferente al que hasta ahora había considerado.

Así fue como se inició una segunda etapa en mi formación investigadora predoctoral, en la que, bajo la dirección y orientación del profesor Alfonso Romero, de la Universidad de Granada, pude profundizar en el estudio de la *geometría de Lorentz* y, en especial, en el estudio de la geometría global de subvariedades *espaciales* en espacios ambiente lorentzianos. Todo esto fue posible gracias al apoyo e interés que en todo momento encontré en mis compañeros del área de Geometría y Topología de la Universidad de Murcia y, en especial, del profesor Ángel Ferrández, quien, fiel a su espíritu abierto y siempre interesado en el fortale-

cimiento de nuestro grupo de investigación, me facilitó la posibilidad de desarrollar una estancia de investigación en la Universidad de Granada durante el curso académico 1992-1993. A partir de entonces, la geometría de superficies y, más generalmente, de subvariedades espaciales en los espacios de Lorentz pasó a desempeñar un papel clave en mi orientación investigadora.

Posteriormente, el disfrute de una beca posdoctoral me brindó la oportunidad de llevar a cabo una estancia posdoctoral de investigación durante el curso académico 1994-1995 en la Universidad de Durham, en el Reino Unido, y de trabajar bajo la orientación del profesor Bennett Palmer. Dicha estancia fue fundamental para poder afianzar y consolidar mi formación investigadora en el marco de la geometría de superficies espaciales en espacios de Lorentz. En este sentido, me permitió aprender y desarrollar nuevas técnicas en las que el profesor Palmer es un reconocido especialista como, por ejemplo, la *teoría de superficies de Riemann*, el *análisis geométrico en variedades* y la *geometría conforme de superficies*, y que han influenciado de manera muy profunda nuestras posteriores líneas de trabajo. Dos años más tarde, y gracias a la financiación del programa de sabáticos para profesores extranjeros, el profesor Palmer estuvo trabajando en la Universidad de Murcia durante el año 1997, periodo durante el cual pudimos continuar nuestra colaboración investigadora, que se mantuvo muy estrecha hasta el año 2001.

Paralelamente a todo esto, y siendo ya profesor en la Universidad de Murcia, pude iniciar una nueva etapa en el seno de nuestro grupo de investigación con la formación de nuevos doctores, faceta ésta que ha dado hasta el momento seis nuevos doctores y que ha contribuido de manera sustancial en mi actividad investigadora. Posteriormente, esta faceta formadora se ha visto acrecentada con la del perfeccionamiento de doctores que, atraídos por nuestros trabajos de investigación, han elegido nuestro grupo de trabajo como el lugar adecuado para desarrollar su formación posdoctoral, así como con la colaboración de

otros colegas e investigadores de diferentes países, fundamentalmente Brasil e Italia, con los que he podido establecer una fluida y fructífera cooperación científica que me ha permitido crecer como persona y como matemático.

El discurso de ingreso que ahora presento pretende dar unas pequeñas pinceladas de lo que ha sido mi contribución a la investigación y al estudio de la geometría diferencial de superficies, de una manera amena y, en lo posible, sencilla.

Los conceptos de superficie y curvatura

¿Qué es una superficie?

Una de las primeras preguntas que nos han podido asaltar a estas alturas del discurso, o simplemente ante el mero título del mismo, es *pero... ¿qué es una superficie?* Intuitivamente todos tenemos una idea natural de lo que es una superficie. Desde el punto de vista matemático, y en el contexto que nos ocupa, por superficie entendemos un objeto o subconjunto de naturaleza bidimensional que *vive* inmerso dentro de un espacio ambiente de mayor dimensión y que, de momento y para simplificar nuestra exposición, supondremos que es el *espacio euclídeo*. Dicho espacio euclídeo no es más que el espacio ambiente en el que vivimos, de naturaleza tridimensional, como nosotros mismos, y en el que distinguimos tres dimensiones: alto, largo y ancho. Ahora bien, dentro de este mundo tridimensional al que nos referiremos como espacio ambiente tiene sentido considerar otros objetos geométricos de dimensiones inferiores.

El más sencillo de ellos es lo que los matemáticos llamamos habitualmente *curva* y que, intuitivamente, representa un camino o una trayectoria en el espacio, semejante al vuelo de una mosca.

Una curva tiene naturaleza unidimensional porque a lo largo de ella sólo podemos desplazarnos en una dirección, que es precisamente la marcada por la curva. Las curvas sirven, por ejemplo, para modelar la trayectoria de un móvil que se mueve libremente en el espacio. Desde luego, el ejemplo más sencillo de curva lo constituye la propia línea recta, de igual manera que el camino más sencillo que puede describir un móvil es la trayectoria rectilínea.

Así mismo, tiene sentido considerar objetos geométricos *bidimensionales*, a los que llamamos superficies, es decir, subconjuntos del espacio ambiente tridimensional que tienen naturaleza bidimensional. Una superficie tiene naturaleza bidimensional porque a lo largo de ella sólo podemos desplazarnos en dos dimensiones, ya que el desplazamiento sobre la superficie está restringido a caminos contenidos en ella misma. Para un supuesto individuo bidimensional que viviera *sobre* una superficie no tendría sentido la *tercera dimensión*, ya que su mundo está limitado a la superficie sobre la que vive, de manera que no podría *mirar hacia arriba* puesto que ello supondría un movimiento en una tercera dimensión de la que carece. Para dicho individuo bidimensional, la tercera dimensión sonaría a ciencia ficción de igual manera que a nosotros, individuos tridimensionales en un mundo tridimensional, nos lo parece la *cuarta dimensión*.

Así, el ejemplo más sencillo de superficie que podemos pensar es la superficie llana de una mesa, lo que los matemáticos llamamos el *plano* (Figura 1).

Otros ejemplos de superficies que habitualmente nos encontramos en la vida cotidiana son la superficie de un balón de fútbol, a la que llamamos *esfera* (Figura 2), la superficie de un balón de rugby, es decir, el *elipsoide* (Figura 3), o la superficie de un bote (sin tapas), esto es, el *cilindro* (Figura 4).

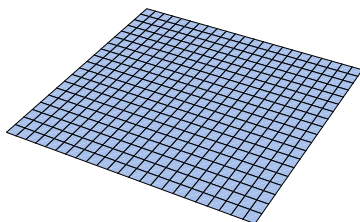


Figura 1: La superficie de una mesa: plano.

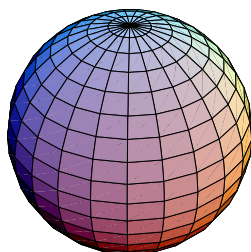


Figura 2: La superficie de un balón de fútbol: esfera.

Señalemos aquí que no se debe confundir la superficie en sí, bidimensional, con el volumen tridimensional que ella encierra. Así, por ejemplo, en el lenguaje cotidiano es muy común confundir la esfera (superficie bidimensional) con la bola (volumen tridimensional encerrado por la esfera). Otros ejemplos más sofisticados de superficies son la superficie de un *donut*, a la que los matemáticos llamamos *toro* (Figura 5), la superficie de un vaso de *Bioamanán*, es decir, el *hiperboloide* (Figura 6), etc...

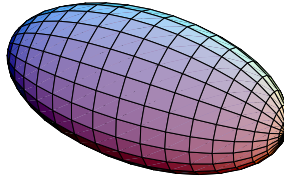


Figura 3: La superficie de un balón de rugby: elipsoide.

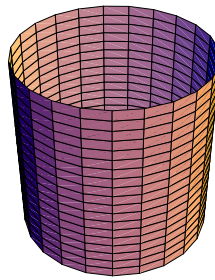


Figura 4: La superficie de un bote: cilindro.

En cualquier caso, se trata siempre de objetos geométricos de naturaleza bidimensional, que viven inmersos en el espacio ambiente tridimensional. Desde el punto de vista matemático, la característica fundamental de una superficie es que *localmente*, es decir, en el entorno de cada uno de sus puntos, se puede ver como el resultado que obtendríamos doblando de manera suave un trozo de papel, sin aristas ni picos. De esta manera, una superficie se puede ver intuitivamente como cubierta por una colección de *parches* bidimensionales dispuestos de tal manera que cuando dichos parches se solapan, lo hacen de manera suave o *diferenciable*. Esto hace posible aplicar los métodos del cálculo diferencial para

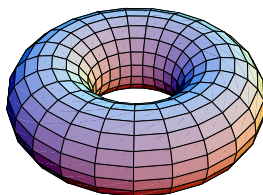


Figura 5: La superficie de un donut: toro.

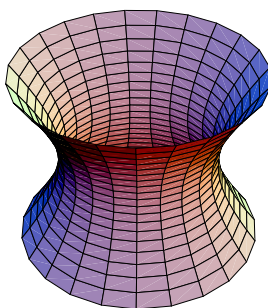


Figura 6: La superficie de un un vaso de *Biomán*: hiperboloide.

el estudio geométrico de las superficies y es, de hecho, el fundamento de la *geometría diferencial*. Como veremos más adelante, la presencia innecesaria del espacio ambiente tridimensional en el cual poder visualizar las superficies, el espacio euclídeo, es simplemente una imposición de nuestra naturaleza física.

Curvatura de una curva plana

Otro término clave con el que a estas alturas nos hemos encontrado es el de *curvatura*. Como he querido dejar de manifiesto en el título de esta lección, la palabra curvatura es fundamental en geometría diferencial, hasta el punto de que no sería demasiado desacertado definir la geometría diferencial como la geometría de la curvatura. En palabras del célebre geómetra francés Marcel Berger (1927-2016), recientemente fallecido en octubre de 2016, "*la curvatura es el invariante riemanniano número 1 y el más natural. Gauss y Riemann lo vieron al instante*".

Comenzando con el caso más sencillo de curvas, de un modo más o menos informal o intuitivo, todos tenemos una idea de lo que es la curvatura de una curva y de que algo esté más o menos curvado. Sin embargo, la descripción matemática precisa del concepto de curvatura no es en absoluto nada inmediato y necesitó de diferentes aproximaciones antes de llegar al concepto actual de curvatura. El primer intento serio de definir matemáticamente la curvatura de una curva aparece en 1684, en la obra *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* [39] del alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), uno de los inventores del cálculo. Pero fue realmente el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) quien inició el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas, introduciendo los conceptos de *longitud* y *curvatura* [33].

Desde luego, según nuestra intuición una línea recta no tiene curvatura alguna (su curvatura debe ser cero), puesto que no se dobla en absoluto, mientras que una circunferencia se dobla lo mismo en todos sus puntos (su curvatura debe ser la misma en todos sus puntos). Además, circunferencias de radio pequeño son circunferencias muy curvadas y conforme aumenta el radio r , disminuye la curvatura de la circunferencia, llegando entonces a la recta como caso extremo de una circunferencia de radio infinito ($r = \infty$). Así, la curvatura de una circunferencia de radio r

es precisamente el cociente

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (\text{curvatura} = \frac{1}{\text{radio}})$$

y la curvatura de una recta es

$$\kappa = \frac{1}{\infty} = 0.$$

La idea intuitiva de Leibniz para introducir el concepto de curvatura de una curva está basada precisamente en este comportamiento de la curvatura de una circunferencia frente a su radio, en un intento por buscar una definición de curvatura que refleje tal comportamiento. Su aproximación hace uso de la llamada *circunferencia osculatriz* de una curva en un punto (del latín *osculari*, besar), que es la circunferencia que mejor se adapta a la curva en dicho punto (es decir, la circunferencia *que besa* a la curva en dicho punto).

Para describir brevemente el enfoque de Leibniz, consideremos que partimos de una *curva plana*, es decir, una curva contenida en un plano del espacio. Así mismo, consideremos que nuestra curva es suficientemente suave (o *diferenciable*) como para que en cada punto de ella tengamos una recta tangente a la curva, es decir, una recta que roza tangencialmente a la curva en dicho punto. La recta tangente es la recta que mejor se aproxima a la curva cerca del punto.

Por geometría elemental, sabemos que por tres puntos no alineados del plano pasa una única circunferencia (en el caso de tres puntos alineados, también podríamos hacer esta afirmación permitiendo circunferencias de radio infinito, esto es, rectas). Por tanto, tres puntos P , Q y R no alineados de una curva plana determinan una circunferencia (Figura 7).

Si fijamos el punto P de la curva y hacemos que los puntos Q y R se aproximen cada vez más al punto P , entonces las circunferencias determinadas por estos tres puntos *convergen* a una

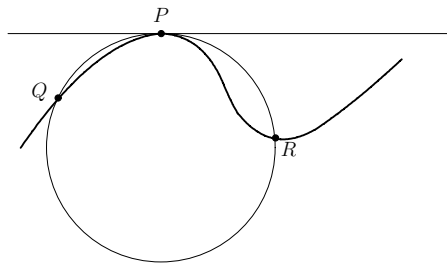


Figura 7: Tres puntos no alineados de una curva plana determinan una circunferencia.

circunferencia tangente a la curva en P , que es la llamada *circunferencia osculatriz* de la curva en el punto P (Figura 8).

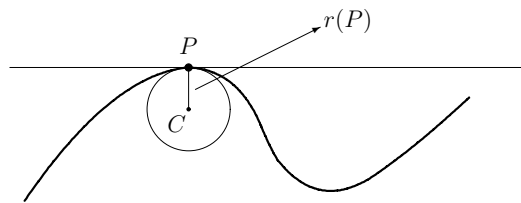


Figura 8: Circunferencia osculatriz.

Se define entonces la curvatura de la curva en el punto P como el inverso del radio de su circunferencia osculatriz,

$$\kappa(P) = \frac{1}{r(P)},$$

siendo $r(P)$ el radio de la circunferencia osculatriz en el punto P . Este radio se llama precisamente el *radio de curvatura* de la curva en P .

Pasemos a continuación a exponer brevemente la aproximación de Euler al concepto de curvatura. Para ello, consideremos

de nuevo una curva plana con recta tangente en cada uno de sus puntos. Consideremos, así mismo, una recta exterior fija, que será nuestra *recta de referencia*. Entonces, Euler introduce la curvatura de una curva en un punto de ella como la *velocidad de variación* del ángulo que forma la recta tangente a la curva en dicho punto con la recta de referencia.

Esto es, para cada punto P de la curva, consideremos $\theta(P)$ el ángulo que forma la recta tangente a la curva en P con la recta de referencia (Figura 9). Dados dos puntos P y Q de la curva,

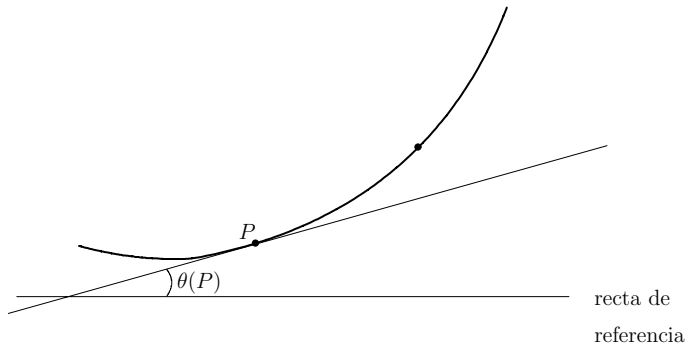


Figura 9: Ángulo de la recta tangente a la curva con la recta de referencia.

representemos por $\Delta\theta(P, Q)$ la diferencia entre ambos ángulos (Figura 10),

$$\Delta\theta(P, Q) = \theta(Q) - \theta(P).$$

Entonces, la curvatura de la curva en P viene dada por

$$\kappa(P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta(P, Q)}{\ell(P, Q)} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\theta(Q) - \theta(P)}{\ell(P, Q)},$$

donde $\ell(P, Q)$ mide la longitud de la curva entre los puntos P y Q , es decir, la distancia entre P y Q a lo largo de la curva. El lector con conocimientos básicos de cálculo sabrá reconocer en

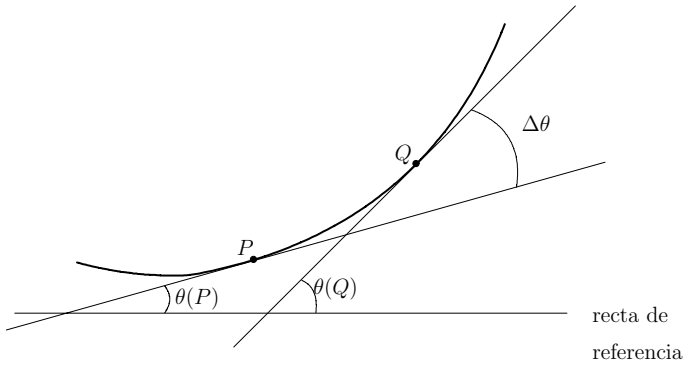


Figura 10: Diferencia entre ángulos.

esta expresión la derivada (o velocidad de variación) del ángulo θ .

No es difícil ver que esta otra definición de curvatura coincide con la anterior. De hecho, con esta definición, es fácil comprobar que una línea recta tiene curvatura cero en todos sus puntos, mientras que una circunferencia de radio r tiene la misma curvatura en todos sus puntos, y viene dada por el inverso de su radio, es decir,

$$\kappa(P) = \frac{1}{r}.$$

Existe aún una tercera aproximación al concepto de curvatura para una curva plana que está basada en la variación de un sistema de referencia privilegiado (el llamado *diedro de Frenet*) a lo largo de la curva. Si bien no vamos a entrar aquí en más detalles al respecto, sirva este comentario al menos para hacernos reflexionar sobre lo complicado que puede llegar a ser formalizar matemáticamente conceptos como la curvatura, que nos parecen claros e intuitivos desde un punto de vista informal e impreciso.

Curvatura de una superficie

Una vez que hemos introducido el concepto de curvatura para una curva plana, pasemos a ver qué se entiende por la curvatura de una superficie. Como ya hemos dicho anteriormente, una superficie es un objeto geométrico de naturaleza bidimensional. Análogamente al caso de curvas, las superficies que vamos a considerar aquí son suficientemente suaves como para que en cada punto de ellas podamos hablar del plano tangente a la superficie en dicho punto. Se trata, pues, de lo que los matemáticos llamamos *superficies diferenciables*, y son superficies sin picos ni aristas. El plano tangente a una superficie en un punto de ella es el plano que roza tangencialmente a la superficie en dicho punto y el que mejor se aproxima a la superficie cerca de ese punto. Esto nos permite distinguir, en cada punto P de una superficie, dos tipos de direcciones: las direcciones tangentes y la dirección normal (o perpendicular) a la superficie en el punto P .

Las direcciones tangentes a la superficie en el punto P son aquellas direcciones que se alcanzan o que se realizan a través de curvas (en general no necesariamente planas) contenidas en la propia superficie y que pasan por el punto P . Estas direcciones constituyen precisamente las del plano tangente a la superficie en dicho punto (Figura 11).

Por contra, la dirección normal en el punto P es la dirección perpendicular (complementaria) a dicho plano, y corresponde a

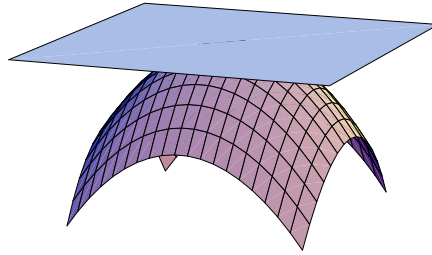


Figura 11: Direcciones tangentes: el plano tangente.

la dirección de las curvas que cortan perpendicularmente a la superficie en el punto (Figura 12). Como vamos a ver a continua-

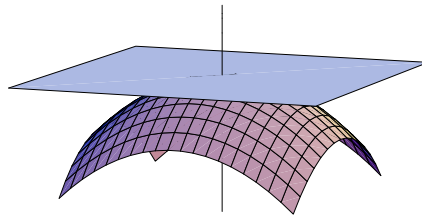


Figura 12: Dirección normal.

ción, el hecho de que en cada punto de una superficie podamos considerar su plano tangente, con sus correspondientes direcciones tangentes y normal, va a ser clave para introducir el concepto de curvatura de una superficie.

Curvaturas seccionales

Fue Euler quien estableció en 1760 los fundamentos de la geometría diferencial de superficies, en su obra titulada *Recherches sur la courbure des surfaces* [33] y a él le debemos la primera aproximación al concepto de curvatura de una superficie. La idea básica de Euler fue reducir el estudio de la curvatura de una superficie en un punto P al estudio de la curvatura en dicho punto de las curvas que se obtienen al cortar transversalmente la superficie por planos perpendiculares a la superficie en el punto P , como a continuación vamos a explicar.

Fijemos una dirección \vec{v} tangente a la superficie en el punto P y consideremos $\Pi_{\vec{v}}$ el plano que pasa por P , es perpendicular a la superficie en P y contiene a la dirección tangente \vec{v} . El plano $\Pi_{\vec{v}}$ corta a la superficie a lo largo de una curva plana en la dirección de \vec{v} . Esto es lo que llamamos la *sección normal* de la superficie determinada por la dirección \vec{v} (Figura 13).

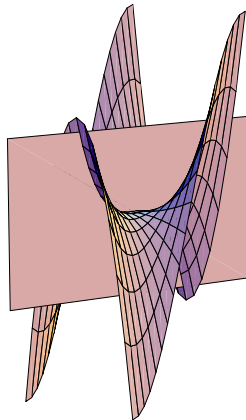


Figura 13: Sección normal.

Evidentemente, si fijamos ahora otra dirección tangente distinta \vec{w} , el plano $\Pi_{\vec{w}}$ varía, así como la sección normal determinada por la nueva dirección tangente \vec{w} . De hecho, la familia de planos perpendiculares a la superficie en el punto P constituye un haz de planos que pasan por P y contienen a la dirección normal y, en principio, cada uno de los planos de este haz determina una sección normal diferente (Figura 14).

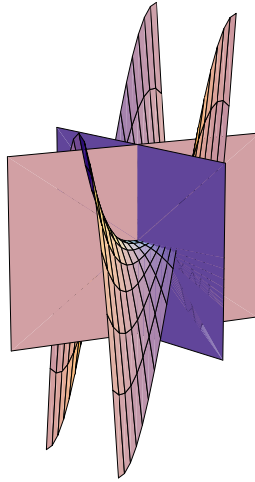


Figura 14: Haz de planos perpendiculares y secciones normales de una superficie arbitraria.

No obstante, existen casos extremos, como el caso en que la superficie de partida sea un plano o una esfera. En efecto, si la superficie de partida es un plano, entonces las secciones normales, independientemente del punto elegido y de la dirección tangente elegida, son siempre líneas rectas y, por lo tanto, tienen todas ellas curvatura cero (Figura 15). Igualmente, si la superficie elegida es una esfera de radio r , entonces, independientemente del punto y de la dirección tangente elegidos, las secciones norma-

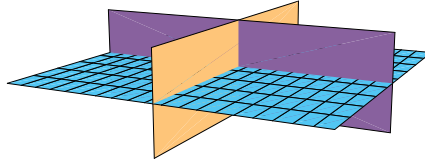


Figura 15: Secciones normales de un plano.

les son ahora siempre circunferencias del mismo radio r , y todas ellas tienen la misma curvatura $1/r$ (Figura 16).

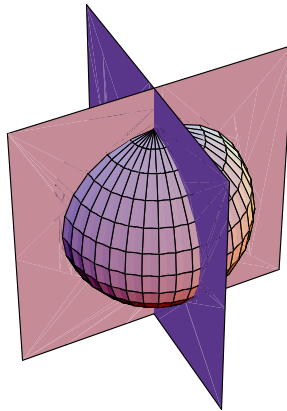


Figura 16: Secciones normales de una esfera.

Sin embargo, esto no es lo habitual. Lo común es que las secciones normales a la superficie varíen, tanto cuando cambiamos el punto P elegido como cuando, fijado el punto, cambiamos la dirección tangente elegida. De esta manera, fijado el punto P generamos una familia de curvas planas, las secciones normales,

que dependen de la dirección tangente elegida \vec{v} . Podemos entonces definir la *curvatura normal* de la superficie en el punto P con respecto a la dirección tangente \vec{v} como la curvatura de la correspondiente sección normal.

Curvaturas principales

Ocurre entonces que, fijado un punto P de la superficie, existen dos direcciones tangentes privilegiadas, que son precisamente aquellas direcciones en las que la curvatura normal alcanza sus valores mínimo y máximo. Estas dos direcciones privilegiadas tangentes a la superficie en el punto P , que son perpendiculares entre sí, se llaman las *direcciones principales* de la superficie en el punto P , y los correspondientes valores de la curvatura normal en dichas direcciones son las *curvaturas principales* de la superficie en dicho punto,

$$\begin{aligned}\kappa_1(P) &= \text{valor mínimo de la curvatura normal,} \\ \kappa_2(P) &= \text{valor máximo de la curvatura normal.}\end{aligned}$$

En el caso del plano y de la esfera, ambos valores coinciden, ya que, como hemos visto, la curvatura normal de un plano es siempre cero y la curvatura normal de una esfera de radio r es siempre $1/r$, independientemente de la dirección tangente elegida, por lo que en el plano se tiene

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$$

mientras que en la esfera es

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = \frac{1}{r}.$$

En particular, cualquier dirección tangente en el plano o en la esfera es una dirección principal, pero, como ya hemos dicho antes, esto no es lo habitual.

Por ejemplo, si la superficie considerada es un cilindro de radio r , como el de la Figura 4, entonces la dirección correspondiente a la de mínima curvatura es la del eje del cilindro, cuya sección normal es una recta y por tanto su curvatura normal es

$$\kappa_1(P) = 0 = \text{valor mínimo de la curvatura normal}$$

(Figura 17). Por su parte, la dirección correspondiente a la de máxima curvatura es la de la circunferencia del cilindro, perpendicular a su eje, con curvatura normal dada por

$$\kappa_2(P) = \frac{1}{r} = \text{valor máximo de la curvatura normal (Figura 17).}$$

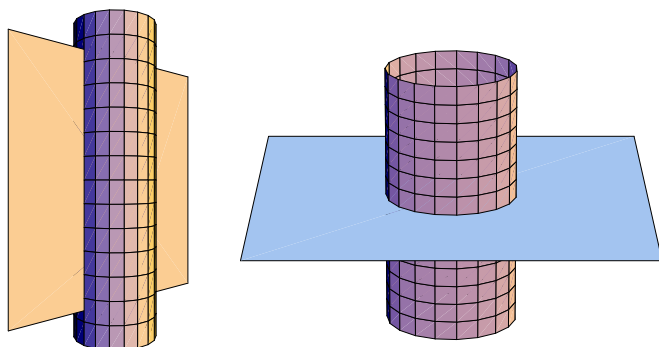


Figura 17: Direcciones principales de un cilindro.

Cualquier otra sección normal del cilindro es una elipse (Figura 18), con curvatura entre 0 (el valor mínimo) y $1/r$ (el valor máximo).

En general, se dice que un punto P de una superficie es un punto *umbílico* cuando las dos curvaturas principales de la su-

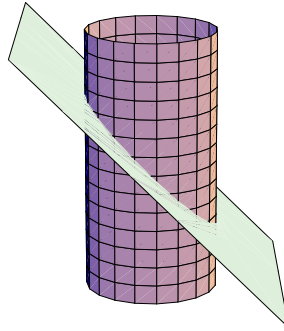


Figura 18: Sección normal de un cilindro.

perficie en dicho punto coinciden,

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P).$$

Por lo tanto, en un punto umbílico la superficie se dobla igual en todas las direcciones tangentes, ya que la curvatura normal de la superficie en dicho punto es la misma en todas sus direcciones tangentes. Por ejemplo, como hemos visto anteriormente, todos los puntos de un plano son puntos umbílicos, con la misma curvatura normal cero. Del mismo modo, todos los puntos de un esfera de radio r son puntos umbílicos, con la misma curvatura normal $1/r$. Esta propiedad caracteriza a ambas superficies, en el sentido de que *las únicas superficies que tienen todos sus puntos umbílicos son los planos y las esferas*. Por su parte, el cilindro no tiene ningún punto umbílico.

Curvatura media y curvatura de Gauss

A partir de las curvaturas principales de la superficie en un punto P , podemos definir dos nuevas magnitudes, su suma

$$\kappa_1(P) + \kappa_2(P)$$

y su producto

$$\kappa_1(P) \times \kappa_2(P).$$

La primera (dividida por 2) da lugar a la llamada *curvatura media* de la superficie en el punto P ,

$$H(P) = \frac{\kappa_1(P) + \kappa_2(P)}{2},$$

que no es más que la media aritmética de las curvaturas principales y que fue introducida por la matemática francesa Sophie Germain (1776-1831) en sus estudios sobre la elasticidad y la curvatura de las superficies [35]. Por otra parte, el producto da lugar a la llamada *curvatura de Gauss* de la superficie en P ,

$$K(P) = \kappa_1(P) \times \kappa_2(P)$$

cuyo nombre hace honor al insigne matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los padres de la geometría diferencial. Precisamente a Gauss le debemos una segunda aproximación a la idea de curvatura, con un bonito contenido geométrico y que describiremos más adelante.

Estas dos magnitudes, la curvatura media y la curvatura de Gauss, son las dos curvaturas fundamentales de una superficie y son radicalmente distintas. En efecto, la curvatura media es una cantidad geométrica *extrínseca*, en el sentido de que su valor depende de cómo la superficie *está metida* en el espacio ambiente tridimensional. Dicho de otra forma, una misma superficie puede meterse en el espacio euclídeo de diferentes maneras y con distintos valores para su curvatura media. El hecho de que la curvatura media sea algo *extrínseco* implica también que no podría ser percibida por los supuestos habitantes bidimensionales que vivieran sobre la superficie.

En contraste, la curvatura de Gauss es una cantidad geométrica *intrínseca*, es decir, no depende de cómo la superficie está metida en el espacio ambiente, sino que únicamente depende de la

geometría propia de la superficie. Este resultado, conocido en la literatura como el *Theorema Egregium* de Gauss, resulta muy sorprendente, ya que el proceso por el que hemos llegado a la curvatura de Gauss, a través de las secciones normales, de las curvaturas normales y de las curvaturas principales, es puramente extrínseco: depende esencialmente de que nuestra superficie *vive* en un mundo euclídeo tridimensional desde donde la podemos contemplar y observar cómo se curva. Sin embargo, el *Theorema Egregium* de Gauss nos garantiza que, a pesar de ello, la curvatura de Gauss es intrínseca, de manera que un supuesto habitante bidimensional de nuestra superficie podría conocer el valor de dicha curvatura sin necesidad de salir de su mundo bidimensional.

Como hemos indicado anteriormente, tenemos una segunda aproximación a la idea de la curvatura de Gauss que se debe al mismo Gauss y que apareció publicada en su trabajo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), considerado el trabajo fundacional de la geometría diferencial clásica, y en donde aparece también su ya nombrado *Theorema Egregium* [34]. Esta otra aproximación está basada en el concepto de *área* de una superficie, algo claro e intuitivo en el que no nos vamos a detener, y en el de su *imagen esférica*.

La imagen esférica de una superficie se describe matemáticamente a través de la llamada *aplicación de Gauss* y es una medida de la variación de la dirección normal a lo largo de la superficie. De alguna manera, la imagen esférica de una superficie arbitraria es una porción de una esfera de radio unidad que es tanto más grande cuanto más se curva la superficie. De hecho, dado un punto P de una superficie, consideremos la dirección normal a la superficie en dicho punto. Esta dirección viene determinada por su *vector director* $N(P)$, que es un vector de longitud unidad en la dirección normal. Dicho vector $N(P)$, trasladado al origen, *puede pensarse* como un punto en la esfera de radio unidad. La aplicación de Gauss es entonces la aplicación que asocia a cada

punto P de la superficie su correspondiente punto $N(P)$ en la esfera unidad (Figura 19).

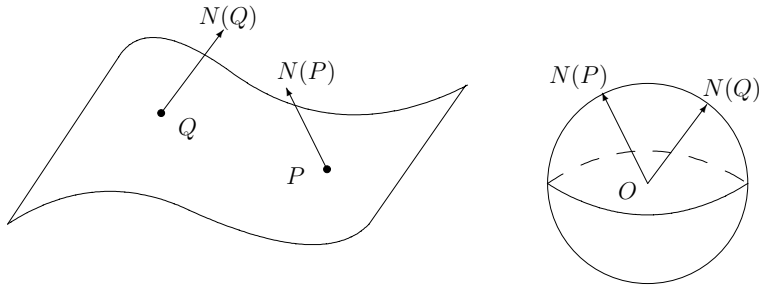


Figura 19: La aplicación de Gauss.

Intuitivamente, la forma de la superficie viene determinada por la manera como varía el plano tangente a la superficie en cada punto o, equivalentemente, por la manera como varía su dirección normal. De ahí el interés de la aplicación de Gauss. Así por ejemplo, la imagen esférica de un plano se reduce a un punto de la esfera unidad, la de un cilindro es todo un ecuador de la esfera, y la de un esfera es toda la esfera unidad.

La manera en la que Gauss introdujo la curvatura de la superficie es la siguiente. Fijado un punto P de la superficie, consideremos un trocito de superficie $\mathcal{U}(P)$ que contenga al punto P en su interior y consideremos también el trocito de esfera unidad determinado por las direcciones normales en cada uno de los puntos de $\mathcal{U}(P)$, es decir, su correspondiente imagen esférica, $N(\mathcal{U}(P))$ (Figura 20).

En esta situación, podemos considerar el área del trocito de superficie $\mathcal{U}(P)$ y el área de $N(\mathcal{U}(P))$, siendo esta última el área de un trocito de esfera unidad (área esférica). Gauss definió entonces la curvatura de la superficie en dicho punto como el *límite* del cociente entre ambas áreas, cuando el trocito de superficie

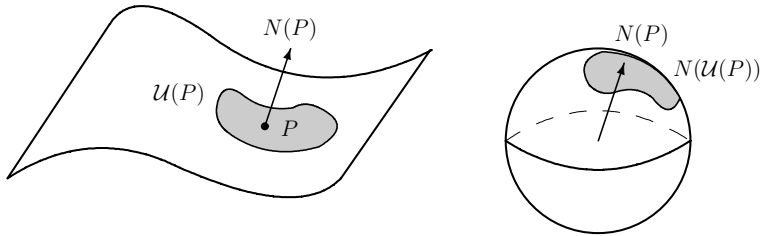


Figura 20: La imagen esférica.

considerado $\mathcal{U}(P)$ se va haciendo cada vez más pequeño alrededor del punto P , es decir,

$$\lim_{\mathcal{U}(P) \rightarrow P} \frac{\text{área esférica de } N(\mathcal{U}(P))}{\text{área de } \mathcal{U}(P)},$$

Se puede comprobar entonces que el valor de este límite es exactamente el de la curvatura de Gauss antes descrita, salvo (quizás) el signo.

Precisamente, y para terminar, señalemos que el signo de la curvatura de Gauss en un punto P tiene un claro significado geométrico y proporciona información sobre la posición relativa de la superficie con respecto a su plano tangente cerca del punto. En concreto, en los puntos donde la curvatura de Gauss es positiva, $K(P) > 0$, resulta que la superficie, cerca de P , se encuentra contenida en uno de los lados determinados por su plano tangente en dicho punto. Tales puntos se llaman *puntos elípticos* (Figura 21).

Por el contrario, en los puntos donde la curvatura de Gauss es negativa, $K(P) < 0$, se tiene que la superficie cruza el plano tangente, ya que siempre tiene algún trozo cerca de P a ambos lados del plano tangente. Estos puntos se llaman *puntos hiperbólicos* o *puntos de silla*, porque la superficie, cerca de ellos, se parece a una silla de montar (Figura 22).

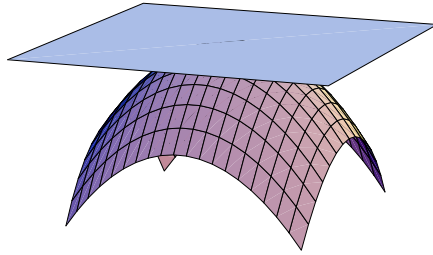


Figura 21: Punto elíptico.

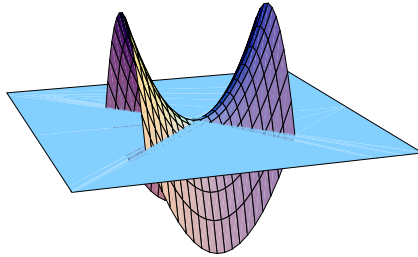


Figura 22: Punto hiperbólico.

Por desgracia, en los puntos donde la curvatura de Gauss se anula, $K(P) = 0$, los llamados *puntos parabólicos*, no podemos decir *a priori* nada sobre esta posición relativa.

Dos resultados clásicos

Como se verá más adelante, dos resultados clásicos que han marcado de manera fundamental la evolución de nuestra trayectoria investigadora han sido el *teorema de Bernstein* y el *teorema de Alexandrov*.

El teorema de Bernstein

El teorema de Bernstein hace referencia a la existencia de superficies *minimales* en el espacio euclídeo que vienen dadas como el *grafo entero* de una función diferenciable y constituye, sin lugar a dudas, uno de los resultados más importantes y destacados de la teoría global de superficies minimales.

Aquí, por superficie *minimal* entendemos una superficie para la cual la curvatura media en cualquiera de sus puntos es siempre $H = 0$. La historia de las superficies minimales tiene su origen en el célebre matemático francés de origen italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) quien, en 1762 y en su famosa memoria *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* [38], plantea por primera vez el problema de determinar cuál es la superficie de menor área de entre todas las que bordean un contorno fijo dado. Unos años más tarde y en lo que sería su única contribución a las matemáticas,

Meusnier [42] demostró que la condición geométrica del problema formulado por Lagrange se reducía a la condición de que la curvatura media de la superficie fuera idénticamente cero en cada uno de sus puntos, justificando así la utilización del apelativo de minimal para referirnos a tales superficies.

Esto ocurre por ejemplo en el caso en que la superficie considerada sea un plano. En efecto, en tal caso sabemos que las curvaturas principales son cero en todos sus puntos, de manera que en todo punto P de un plano se tiene que

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0 \quad \text{y} \quad H(P) = \frac{0 + 0}{2} = 0.$$

Dicho de otra manera, todo plano es una superficie minimal, hecho que ya fue observado por Lagrange en 1762.

El teorema de Bernstein, demostrado en 1910 por el matemático ruso Sergei Bernstein (1880-1968) establece que precisamente los planos son las únicas superficies minimales que se pueden representar como el grafo de una función de dos variables definida globalmente sobre todo \mathbb{R}^2 [24, 25].

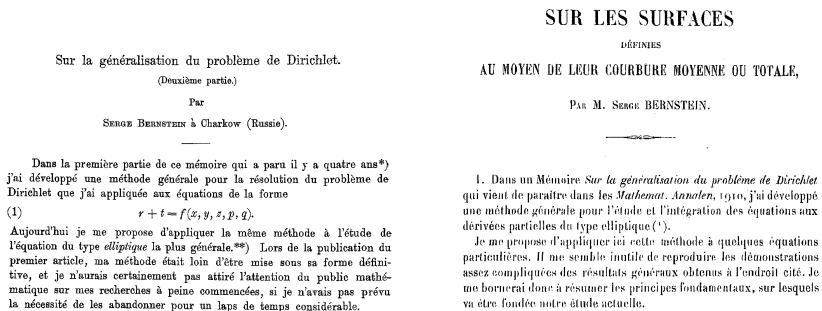


Figura 23: Artículos originales de S. Bernstein.

Un grafo es un tipo particular de superficie que admite una representación particularmente sencilla en términos de una fun-

ción de dos variables. En concreto, si denotamos por (x, y, z) las coordenadas usuales del espacio euclídeo y consideramos una función diferenciable $u(x, y)$ definida sobre una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ del plano (x, y) , el grafo determinado por la función $u(x, y)$ es la superficie dada por

$$\Sigma(u) = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dicho de otra manera, es el subconjunto del espacio euclídeo determinado por la ecuación $z = u(x, y)$ (Figura 24).

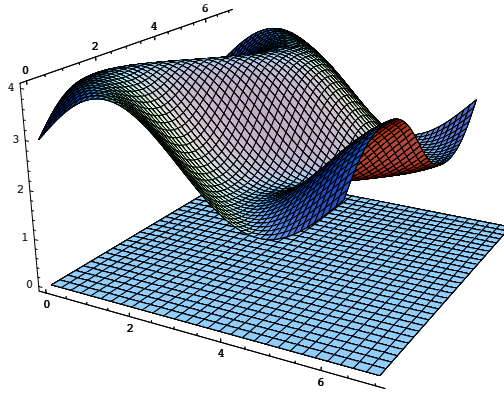


Figura 24: El grafo de una función.

Para tales superficies, la condición de ser minimal o, en otras palabras, la condición de tener curvatura media cero en todos sus puntos, se traduce en una *ecuación en derivadas parciales* que ya era conocida por Lagrange y que se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = 0,$$

donde u_x y u_y denotan las *derivadas parciales* de la función u , es decir,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Esta ecuación se puede escribir de forma más compacta en términos del *gradiente* de la función u y de la *divergencia* como

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0,$$

donde $Du = (u_x, u_y)$ representa el gradiente de la función u y div es el operador divergencia.

Resulta curioso señalar que Lagrange prefería esta formulación, que envuelve sólo las primeras derivadas parciales de la función u , a la que se obtiene desarrollando dichas derivadas y que conduce a lo que hoy se conoce como la *ecuación de las superficies minimales*, una ecuación en derivadas parciales *elíptica de segundo orden* que viene dada por

$$(1 + u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy} = 0, \quad (1)$$

donde u_{xx} , u_{xy} y u_{yy} representan las derivadas parciales segundas de la función u ,

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

En estos términos, el teorema de Bernstein establece que las únicas soluciones de la ecuación de las superficies minimales que están globalmente definidas para todo valor de (x, y) son las funciones afines, de la forma

$$u(x, y) = ax + by + c, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La demostración original de este resultado, dada por Bernstein, está fuertemente basada en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales y pertenece más al ámbito del análisis matemático que al de la geometría misma. Posteriormente se han proporcionado otras demostraciones más geométricas del mismo, entre las que destacamos, por su importancia y relevancia en

nuestro propio trabajo de investigación, la aportada en 1969 por uno de los más influyentes geómetras diferenciales del siglo XX, el profesor americano de origen chino Shiing-Shen Chern (1911-2004), quien enunció una versión equivalente pero más geométrica del teorema de Bernstein en los siguientes términos: las únicas superficies minimales *completas* en el espacio euclídeo cuya *imagen esférica* está contenida en un semiesfera abierta son los planos.

Recordemos que la imagen esférica de una superficie viene dada a través de su aplicación de Gauss y es una medida de la variación de la dirección normal a lo largo de la superficie. De esta manera, pedir a la superficie que su imagen esférica esté contenida en una semiesfera abierta es pedir que la superficie no se curve *demasiado* sobre sí misma y viene a decir que la superficie sea el grafo de una función diferenciable. Por otra parte, la hipótesis de *completitud* de la superficie indica de alguna manera que la superficie no tiene fronteras y se corresponde con el hecho de que la función que define el grafo esté definida para todos los valores de (x, y) , es decir, con el hecho de que la superficie sea un grafo entero.

El teorema de Alexandrov

Por otra parte, el teorema de Alexandrov hace referencia a superficies *cerradas* de curvatura media constante, es decir, superficies para las cuales la curvatura media tiene el mismo valor constante (y, como veremos, necesariamente distinto de cero) en todos sus puntos. El ejemplo más sencillo de una tal superficie es el de una esfera de radio r , para la cual sabemos que sus curvaturas principales coinciden en todos sus puntos y su valor es exactamente el de la curvatura de una circunferencia del mismo radio r , con independencia del punto elegido. Por lo tanto, en

todo punto P de una esfera de radio r se tiene que

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad H(P) = \frac{1/r + 1/r}{2} = \frac{1}{r}.$$

De este manera, toda esfera de radio r tiene curvatura media constante y distinta de cero.

El teorema de Alexandrov constituye, sin lugar a dudas, uno de los resultados más bonitos y, a su vez, profundos de la teoría global de superficies en el espacio euclídeo. Este teorema, que fue demostrado en 1958 por el matemático y geómetra ruso Alexandr D. Alexandrov (1912-1999) en [5], establece que las únicas superficies *cerradas* y *embebidas* con curvatura media constante en el espacio euclídeo son precisamente las esferas de radio r .

¿Qué significan aquí los conceptos de *superficie cerrada* y de *superficie embebida*? En ambos casos se trata de condiciones de naturaleza *topológica*. De una manera imprecisa e informal, podríamos decir que la *topología* es la geometría más primitiva, en el sentido de que desde el punto de vista topológico no existen distancias, ni ángulos, ni áreas, ni medidas, sino sólo *formas*. Dos objetos son topológicamente equivalentes (es decir, tienen la misma forma topológica) si se pueden deformar el uno en el otro, como si fueran hechos de *plastilina*, sin cortarlos ni romperlos. Así, por ejemplo, desde el punto de vista topológico no podemos diferenciar un balón de fútbol de un balón de un rugby, ya que achatando convenientemente un balón de fútbol hecho de *plastilina*, obtenemos uno de rugby. Del mismo modo, desde el punto de vista topológico un donut es equivalente a una taza, razón por la que se dice que un topólogo es aquel que no puede diferenciar entre su taza de café y su donut (Figura 25).

En el contexto de la topología, que una superficie sea *cerrada* quiere decir simplemente que sea *compacta*, es decir que no se vaya al infinito (que sea acotada), y que no tenga *fronteras*. Un plano (infinito) sería un ejemplo de una superficie que no es cerrada

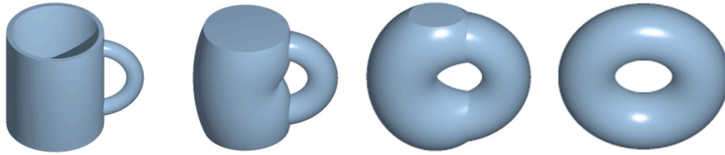


Figura 25: Un topólogo no sabe diferenciar una taza de un donut.

en este sentido, ya que no es compacta sino que se va al infinito. Igualmente, un disco plano de un cierto radio r (con borde) sería un ejemplo de una superficie compacta que no es cerrada, ya que tiene una frontera, su borde, la circunferencia de radio r . Por contra, la esfera, el elipsoide y el toro son ejemplos de superficies cerradas. Toda superficie cerrada en el espacio euclídeo tiene necesariamente algún punto elíptico, razón por la cual si la curvatura media de la superficie es constante, ésta debe ser necesariamente distinta de cero.

En cuanto a la segunda de las condiciones topológicas del teorema de Alexandrov, superficie *embebida*, se refiere a que las superficies que estamos considerando son superficies que no se cortan a sí mismas, es decir, superficies *sin autointersecciones*. El concepto de superficie embebida es algo más complicado de explicar, porque las superficies que habitualmente vemos o nos imaginamos son todas ellas embebidas. Sin embargo, tiene sentido considerar superficies que no son embebidas, sino que se retuercen sobre sí mismas y se cortan a lo largo de aristas curvilíneas. Este otro tipo de superficies es lo que llamamos *superficies inmersas* (Figura 26) y son más complicadas de tratar.

Por lo tanto, lo que el teorema de Alexandrov afirma es que una superficie, en el sentido más intuitivo de la palabra, esto es, embebida, que no se vaya al infinito y no tenga fronteras, y que tenga la misma curvatura media en todos sus puntos debe ser necesariamente una esfera.

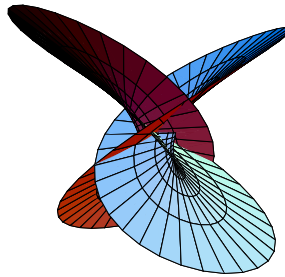


Figura 26: Superficie inmersa.

Las superficies de curvatura media constante aparecen en la naturaleza como superficies cuya forma es óptima en algún sentido. Así, por ejemplo, las superficies minimales (de curvatura media constante e igual a cero) las podemos observar en las películas de jabón. Si sumergimos una estructura de alambre en una solución jabonosa, entonces la película de jabón que se forma adquiere la forma óptima de una superficie de curvatura media cero en todos sus puntos. Esto se debe a que la película de jabón adopta la forma de la superficie de mínima área de entre todas las superficies bordeadas por dicha estructura de alambre (Figura 27).

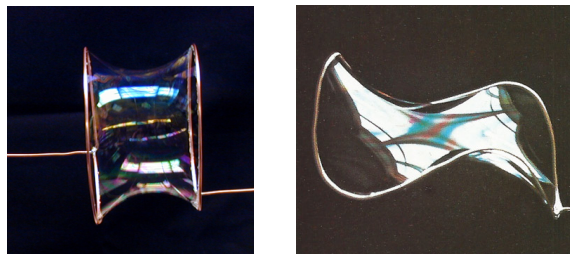


Figura 27: Superficies minimales vistas como películas de jabón.

Del mismo modo, las pompas de jabón adquieren la forma óptima para la cual, siendo el volumen encerrado por la pompa una cantidad fija, el área de la superficie de la pompa sea la menor posible (Figura 28). Desde el punto de vista matemático, esto se traduce en que las pompas de jabón son superficies de curvatura media constante. La justificación física de este fenómeno está



Figura 28: Pompas de jabón.

en la *ecuación de Laplace-Young*, en honor del matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827) y del físico inglés Thomas Young (1773-1829), la cual establece que la diferencia de presión entre ambos lados de una película o de una pompa de jabón viene dada por el producto de la tensión superficial y la curvatura media de la superficie que se forma.

La posibilidad de explorar otros mundos

Hasta ahora hemos estado considerando el caso más sencillo y natural de superficies en el espacio euclídeo en tanto que objetos bidimensionales que viven inmersos en nuestro mundo tridimensional. Sin embargo, y como ya adelantábamos al introducir el concepto de superficie, desde el punto de vista intrínseco la presencia de dicho espacio ambiente euclídeo en el que poder visualizar nuestras superficies es innecesaria y surge como una imposición de nuestra propia naturaleza física. Una superficie del espacio euclídeo *hereda*, a partir de la métrica euclídea estándar, una manera natural de medir ángulos, longitudes y áreas en la propia superficie, la llamada *primera forma fundamental*. El punto crucial aquí fue la observación hecha por Gauss en 1827 [34] de que la geometría intrínseca de la superficie, es decir, la geometría percibida por los *habitantes bidimensionales* de la superficie, depende única y exclusivamente de la manera de medir en la superficie, esto es, de su primera forma fundamental.

El descubrimiento de Gauss implicaba, entre otras cosas, que sería posible imaginar una geometría, al menos en dimensión dos, que dependiera de una forma cuadrática fundamental dada de una manera arbitraria y sin necesidad de depender del espacio ambiente euclídeo. Desde los tiempos de Euclides, y durante casi dos mil años, se habían estudiado las propiedades geométricas

de las figuras planas y espaciales pero siempre dando por hecho que se encuentran contenidas en el espacio ambiente.

Sin embargo, Gauss no disponía de las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar sus ideas y tendría que ser su estudiante Bernhard Riemann (1826-1866) quién lo hiciera, a pesar de que él tampoco tenía todavía una definición adecuada de variedad. De esta manera, Riemann desarrolló su teoría de los *espacios de dimensión superior* en lo que constituyó su *tesis de habilitación* [48] presentada en la Universidad de Gotinga en 1854. Utilizando un lenguaje intuitivo y sin demostraciones, en

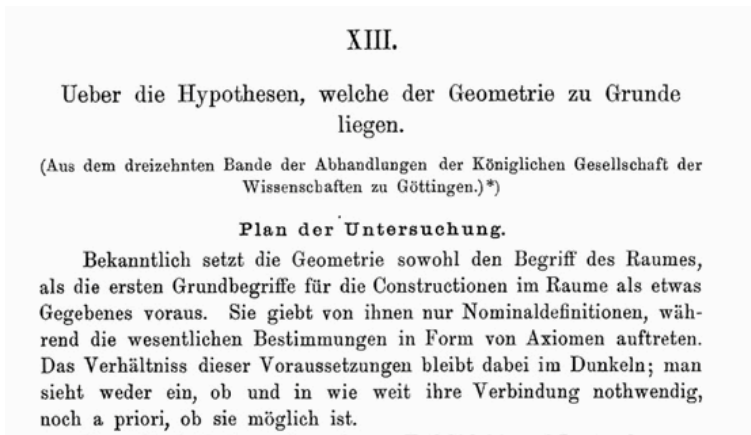


Figura 29: Tesis de habilitación de Riemann.

su célebre memoria Riemann introdujo lo que hoy llamamos una variedad diferenciable y asoció a cada punto de la variedad una forma cuadrática fundamental, generalizando entonces la idea de curvatura a esta nueva situación. Riemann estableció la manera correcta de extender a dimensiones arbitrarias la geometría que Gauss había desarrollado para superficies de dimensión dos, marcando el nacimiento de la *geometría riemanniana*.

Debido a la falta de herramientas apropiadas, la geometría riemanniana como tal se desarrolló muy lentamente. Posteriormente, y bajo el ímpetu de la teoría de la relatividad de Einstein (1915), apareció una nueva generalización, debilitándose la condición de *ser definida positiva* para la forma cuadrática a la de *ser no degenerada*, y considerando en particular el caso de *métricas lorentzianas*. La aplicación de estas ideas a la teoría de la relatividad fue, de hecho, una importante fuente externa de estimulación para el desarrollo y formalización de la geometría riemanniana que hoy conocemos.

La teoría de la relatividad de Einstein se fundamenta en el hecho de que el universo se modela en términos de una variedad diferenciable de dimensión cuatro, llamada *espaciotiempo*, en la que tenemos tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal que interactúan entre sí, y equipado con una métrica lorentziana que nos permite distinguir direcciones espaciales, direcciones temporales (de *longitud negativa*) y direcciones luminosas (de *longitud nula*). La curvatura de dicho espaciotiempo se interpreta entonces en términos de la gravedad y las ecuaciones que describen la relación entre la gravedad y la curvatura son las llamadas *ecuaciones de campo* de Einstein. De una manera intuitiva, dichas ecuaciones reflejan el hecho de que una masa en el espacio produce una deformación del espacio que lo curva.

El ejemplo más sencillo de espaciotiempo lo constituye el llamado *espacio de Lorentz-Minkowski*, que modela la teoría de la relatividad especial. En dimensión tres, dicho espacio lo denotamos por \mathbb{L}^3 y lo podemos visualizar geoméricamente como el espacio euclídeo usual \mathbb{R}^3 con sus coordenadas habituales (x, y, z) , pero en donde la coordenada z juega aquí el papel de la coordenada temporal, de longitud negativa. La métrica lorentziana de \mathbb{L}^3 se escribe entonces de la siguiente manera

$$dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

en contraste con la métrica usual euclídea de \mathbb{R}^3 , que vendría dada por

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En esta métrica lorentziana, la luz está confinada a viajar en las direcciones luminosas en lo que constituye el llamado *cono de luz* (Figura 30)

$$\Lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

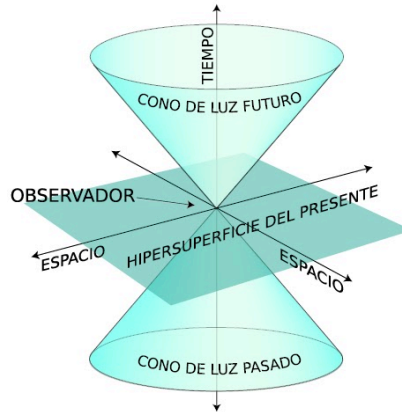


Figura 30: Cono de luz.

Superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski

Una vez establecida la posibilidad y el interés de considerar otros espacios ambiente diferentes al espacio euclídeo usual e introducido el concepto de espaciotiempo como el de una variedad diferenciable equipada con una métrica *lorentziana* que nos permite modelar el universo, nos centramos ya en una parte importante de nuestra trayectoria investigadora dedicada al estudio de la geometría global de *subvariedades espaciales* de un espaciotiempo. Para simplificar la exposición, nos limitaremos aquí al caso más sencillo de superficies en el espacio tridimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , si bien gran parte de la teoría que vamos a desarrollar admite una extensión al caso más general de *hipersuperficies* en espaciotiempos mucho más generales y de dimensión arbitraria.

Se dice que una superficie contenida en \mathbb{L}^3 es una superficie *no degenerada* cuando la métrica inducida sobre cada uno de los puntos de la superficie a partir de la métrica lorentziana del ambiente es una métrica no degenerada. En tal caso y por cuestiones de dimensión, dicha métrica puede ser o bien riemanniana, es decir, definida positiva, en cuyo caso decimos que la superficie es *espacial*, o bien lorentziana, en cuyo caso hablamos de una *superficie temporal*. Existe todavía un tercer caso extremo que corresponde al caso en la métrica inducida sobre la superficie es

degenerada, como ocurre en el *cono de luz*, en cuyo caso se habla de *superficies luminosas*.

Del mismo modo que vimos para el caso de superficies del espacio euclídeo, para superficies *no degeneradas* de \mathbb{L}^3 podemos determinar siempre una dirección normal. Para superficies espaciales dicha dirección normal es siempre una dirección *temporal* y determina una *aplicación de Gauss futura* que toma valores en la componente futura del plano hiperbólico (Figura 31), representado por la superficie cuadrática

$$\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}.$$

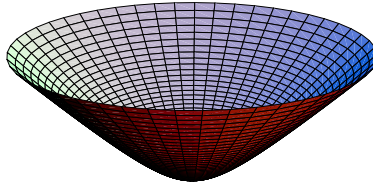


Figura 31: Componente futura del plano hiperbólico.

Por contra, para superficies temporales dicha dirección normal es siempre una dirección *espacial* y determina una aplicación de Gauss que toma valores en la *esfera lorentziana*, o *plano de De Sitter*, (Figura 32) dada por

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Análogamente al caso de superficies en el espacio euclídeo, la existencia de una aplicación de Gauss bien definida y de una métrica no degenerada permite hablar de las curvaturas seccionales de la superficie e introducir, de modo parecido, la curvatura media de la superficie H y su curvatura de Gauss K .

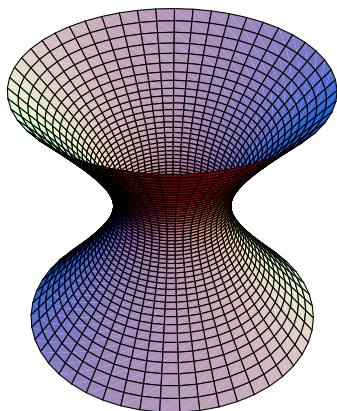


Figura 32: Esfera lorentziana (o plano de De Sitter).

Nuestra primera incursión en la investigación matemática

El primer resultado original que obtuvimos en nuestra andadura por este mundo de la investigación matemática, y que fue parte de nuestra *tesina de licenciatura* [6], defendida en 1991 bajo la dirección de Ángel Ferrández y de Pascual Lucas, se enmarca precisamente en el contexto de las superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski. En el marco de la *teoría de subvariedades de tipo finito*, creada y desarrollada por B.Y. Chen [29, 30], fuimos capaces de establecer la caracterización y clasificación local de las superficies de \mathbb{L}^3 cuyas funciones coordenadas admiten una descomposición espectral del tipo

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde Δ representa el operador laplaciano de la superficie.

En éste nuestro primer artículo de investigación [9], publicado en 1992, establecimos que las únicas soluciones no triviales a la condición (2) en el espacio de Lorentz-Minkowski son los planos hiperbólicos $\mathbb{H}^2(r)$, las *esferas lorentzianas* $\mathbb{S}_1^2(r)$, los *cilindros hiperbólicos* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^1(r)$ y los *cilindros lorentzianos* del tipo $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1^1(r)$ y $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{L}$.

El paso clave en la demostración de este resultado fue demostrar que la condición (2) era de hecho una condición de *curvatura media constante*. Nuestro artículo (Figura 33) fue publicado en la revista *Pacific Journal of Mathematics*, una revista fundada en 1951 y publicada por el consorcio de la universidades de California con base en Berkeley. Todavía recuerdo con cariño la emoción que nos supuso recibir por primera vez la carta de aceptación de un artículo de investigación. Nuestro primer teorema...

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 156, No. 2, 1992

SURFACES IN THE 3-DIMENSIONAL
LORENTZ-MINKOWSKI SPACE SATISFYING
 $\Delta x = Ax + B$

LUIS J. ALÍAS, ANGEL FERRÁNDEZ AND PASCUAL LUCAS

In this paper we locally classify the surfaces M_s^2 in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3 verifying the equation $\Delta x = Ax + B$, where A is an endomorphism of \mathbb{L}^3 and B is a constant vector.

We obtain that classification by proving that M_s^2 has constant mean curvature and in a second step we deduce M_s^2 is isoparametric.

Figura 33: Nuestro primer teorema.

Posteriormente, fuimos capaces de extender este tipo de resultados, primero al caso de hipersuperficies y subvariedades de los espacios pseudo-euclídeos [10] y más tarde al caso más general de hipersuperficies en los espacios pseudo-riemannianos

de curvatura constante, dando lugar a un interesante teorema de clasificación que fue publicado en la prestigiosa revista *Transactions of the American Mathematical Society* [11], publicada por la Sociedad Matemática Americana, y que constituyó un capítulo importante de nuestra tesis doctoral [7].

Muchos años más tarde, en 2006 y en colaboración con la profesora turca Nevin Gürbüz, de la Universidad Osmangazi en Eskisehir, Turquía, volvimos sobre este tipo de problemas al considerar el estudio de superficies (en general, hipersuperficies) en el espacio euclídeo para las cuales las funciones coordenadas admiten una descomposición espectral similar a la considerada en la condición (2) pero con respecto al operador de Cheng y Yau, que denotamos por \square . De la misma manera que el operador laplaciano Δ está asociado de manera natural a la curvatura media de la superficie, el operador \square de Cheng y Yau está asociado a su curvatura de Gauss. De esta manera, en nuestro artículo [12] abordamos de manera pionera el estudio de las superficies de \mathbb{R}^3 para las cuales sus funciones coordenadas admiten una descomposición espectral del tipo

$$\begin{pmatrix} \square x \\ \square y \\ \square z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde ahora \square es el operador de Cheng y Yau. En particular, demostramos que las únicas superficies completas de \mathbb{R}^3 que satisfacen la condición (3) son los planos, las esferas y los cilindros sobre curvas planas. En este caso, la clave de la demostración pasa por demostrar que la condición (3) implica que la curvatura de Gauss debe ser necesariamente constante, junto con el teorema clásico de Hartman-Nirenberg [36] que garantiza que las únicas superficies completas con curvatura de Gauss $K = 0$ en \mathbb{R}^3 son los planos y los cilindros sobre curvas planas.

Este artículo [12] abrió la puerta al estudio de las superficies e hipersuperficies cuyas funciones coordenadas admiten una des-

composición espectral con respecto al operador de Cheng y Yau, y, en general, con respecto a los operadores *linealizados* de las curvaturas medias de orden superior, no sólo en el espacio euclídeo sino también en los espacios esféricos e hiperbólico [13]. En este contexto se enmarca precisamente una de las últimas tesis doctorales defendidas en nuestro grupo [47], dirigida por el profesor Pascual Lucas, en donde se extiende este estudio a otros espacios lorentzianos y, en general, pseudo-riemannianos.

Superficies maximales. El teorema de Calabi-Bernstein

Una superficie espacial en \mathbb{L}^3 se dice que es una *superficie maximal* si su curvatura media es cero en todos sus puntos, en analogía a las superficies minimales de \mathbb{R}^3 . El término maximal aquí hace referencia a que en este caso localmente maximizan el área.

Como veremos a continuación, desde el punto de vista puramente matemático las superficies maximales tienen gran interés debido a que gozan de interesantes propiedades de tipo Bernstein. Por otra parte, desde el punto de vista físico, el interés de tales superficies en relatividad general quedó claro desde que en su clásico artículo [40] André Lichnerowicz (1915-1998) demostró que este tipo de superficies son las más adecuadas como datos iniciales para resolver el problema de Cauchy de las ecuaciones de Einstein.

Del mismo modo a lo que ocurre en el espacio euclídeo, los ejemplos más sencillos de superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski son los planos espaciales. En este sentido, en 1970 Eugenio Calabi [28] demostró que tales planos son, de hecho, las *únicas* superficies maximales *completas* en \mathbb{L}^3 . Este es el llamado teorema de Calabi-Bernstein, en su versión paramétrica. Recordemos que por *completa* aquí se hace referencia, de alguna

manera, a que la superficie no tiene fronteras. Este resultado es un ejemplo típico de lo que hoy en día se conoce como un *resultado tipo Bernstein*, en alusión al clásico teorema de Bernstein sobre grafos enteros minimales. No en vano, en su versión no-paramétrica el teorema de Calabi constituye la solución al problema Bernstein para grafos maximales en \mathbb{L}^3 .

En efecto, restringiéndonos siempre al caso de dimensión dos, en [28] Calabi propuso el estudio de la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$(1 - u_y^2)u_{xx} + 2u_xu_yu_{xy} + (1 - u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (4)$$

bajo la condición

$$u_x^2 + u_y^2 < 1 \quad (5)$$

para una función diferenciable $u(x, y)$. Ésta es precisamente la ecuación que caracteriza a una superficie maximal de \mathbb{L}^3 que viene dada como el grafo $z = u(x, y)$ de una función diferenciable definida sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. La condición (5) refleja el hecho de la métrica inducida sobre el grafo

$$\Sigma(u) = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{L}^3$$

a partir de la métrica lorentziana de \mathbb{L}^3 es una métrica riemanniana, mientras que la ecuación (4) es justamente la ecuación que determina el hecho de que la curvatura media de dicho grafo sea idénticamente cero en todos sus puntos. En otras palabras, es la llamada *ecuación de las superficies maximales*, que puede escribirse de manera equivalente en términos del gradiente $Du = (u_x, u_y)$ de la función u y del operador divergencia como

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = 0, \text{ bajo la condición } |Du|^2 < 1. \quad (6)$$

El propio Calabi demostró que esta ecuación tiene la propiedad Bernstein de que sus únicas soluciones globalmente definidas para todo valor de (x, y) , esto es, sus únicas soluciones *enteras*, son

las funciones afines $u(x, y) = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a^2 + b^2 < 1$, en lo que constituye la versión no-paramétrica del teorema de Calabi-Bersntein.

Posteriormente, el resultado de Calabi fue extendido a *hipersuperficies maximales* de cualquier dimensión n por Cheng y Yau en [31], estableciendo que las únicas hipersuperficies maximales completas en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} son los *hiperplanos afines* espaciales; equivalentemente, los únicos grafos enteros maximales en \mathbb{L}^{n+1} son dichos hiperplanos. Este hecho marca una de las diferencias más significativas entre el comportamiento de una hipersuperficie *maximal* del espacio de Lorentz-Minkowski y el de una hipersuperficie *minimal* del espacio euclídeo.

En efecto, si bien el planteamiento del problema Bernstein es similar en ambos casos, no lo es su resolución. En el caso euclídeo dicho problema sólo tiene solución afirmativa en su versión no-paramétrica, esto es, para grafos enteros, y sólo para dimensiones bajas, hasta $n \leq 7$; para $n > 7$ existen soluciones no triviales de la ecuación de los grafos minimales globalmente definidas en todo \mathbb{R}^n , como pusieron de manifiesto en 1969 Bombieri, de Giorgi y Giusti en su célebre trabajo sobre conos minimales [26]. Sin embargo, en el caso lorentziano el problema admite una solución afirmativa en cualquier dimensión y en sus dos versiones, paramétrica y no-paramétrica. Una diferencia sustancial que, *a priori*, podría hacernos esperar un comportamiento diferente es que, desde un punto de vista analítico, la ecuación de las superficies minimales no tiene ninguna *ligadura* para sus soluciones, mientras que si hay una tal ligadura en la ecuación de las superficies maximales, determinada por el hecho de que el grafo debe ser espacial.

Nuestra contribución al teorema de Calabi-Bernstein

Como es de suponer, el teorema de Calabi-Bernstein ha desempeñado un papel fundamental en el estudio y desarrollo de la teoría global de superficies maximales en \mathbb{L}^3 . Desde su demostración original, diversos autores han abordado el resultado desde diferentes perspectivas, proporcionando diversas extensiones y nuevas demostraciones del teorema. En esta dirección, nosotros mismos hemos contribuido aportando una nueva demostración del teorema de Calabi-Bernstein para superficies maximales de \mathbb{L}^3 .

Nuestra contribución, realizada en colaboración con Bennett Palmer, el *amigo americano*, y publicada en 2001 en el *Bulletin of the London Mathematical Society* [19], introduce un nuevo enfoque del problema basado en la obtención de una estimación *local* para la curvatura total sobre *discos geodésicos* de superficies maximales en \mathbb{L}^3 . Dicha estimación involucra la geometría local de la superficie y su imagen hiperbólica y, como aplicación, nos permite deducir una nueva demostración del teorema de Calabi-Bernstein. En concreto, demostramos que en el entorno de cada punto P de una superficie maximal en \mathbb{L}^3 , la integral de su curvatura de Gauss K sobre un pequeño disco geodésico $D_r(P)$, de centro P y radio $r > 0$, está acotada de la siguiente forma

$$0 \leq \int_{D_r(P)} K \leq \frac{c_r}{\log(R/r)}$$

donde $c_r > 0$ es una constante local positiva que depende del tamaño de la imagen hiperbólica de $D_r(P)$ y $R > r$ es un radio mayor que R tal que el disco geodésico $D_R(P)$ es *relativamente compacto*. En consecuencia, si la superficie es completa, el radio R en la desigualdad anterior puede ser tan grande como se quiera

lo que conduce a que

$$0 \leq \int_{D_r(p)} K \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{c_r}{\log(R/r)} = 0,$$

lo cual implica que $K(P) = 0$ para todo punto de la superficie maximal, y ésta debe ser necesariamente un plano espacial.

Por otra parte, y también en colaboración con Bennett Palmer, en [20] establecimos un sencillo pero interesante resultado de dualidad entre la ecuación de las superficies minimales (1) y la ecuación de las superficies maximales (4) que nos permite demostrar cómo el teorema clásico de Bernstein para grafos minimales enteros puede ser visto como una consecuencia de la versión no-paramétrica del teorema de Calabi-Bernstein para grafos maximales enteros, y viceversa.

En concreto, consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio *simplemente conexo* del plano (x, y) y tomemos $u(x, y)$ una solución de la ecuación de las superficies minimales sobre Ω

$$\text{Minimal}[u] = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0. \quad (7)$$

Aquí, y de una manera imprecisa, por *simplemente conexo* entendemos que el dominio *no tiene agujeros*. En esta situación, si J representa la rotación positiva de 90 grados en el plano (x, y) , demostramos que el campo de vectores dado por

$$W = J \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} (-u_y, u_x)$$

admite un *potencial* $w(x, y)$ para el cual $W = Dw$ que es precisamente una solución de la ecuación de las superficies maximales sobre Ω

$$\text{Maximal}[w] = \operatorname{div} \left(\frac{Dw}{\sqrt{1 - |Dw|^2}} \right) = 0, \text{ con } |Dw|^2 < 1. \quad (8)$$

El proceso es reversible y cumple la propiedad de que u es una solución no trivial de (7) si y sólo si w es una solución no trivial de (8). En particular, cuando se toma como dominio simplemente conexo todo el plano $\Omega = \mathbb{R}^2$ se obtiene como consecuencia la equivalencia entre los dos problemas Bernstein.

Más recientemente, en nuestro trabajo conjunto con Alma L. Albuje pudimos extender este tipo de resultados al caso más general de superficies maximales en los llamados *espacios producto lorentzianos*, en lo que constituyó finalmente la tesis doctoral de Alma L. Albuje [1], defendida con éxito en 2008. Entre otros resultados, pudimos establecer las dos versiones del teorema de Calabi-Bernstein para el caso en que la *fibra riemanniana* del producto es una superficie de curvatura de Gauss no-negativa, así como proporcionar *contraejemplos* que demostraron que el teorema no seguía siendo válido para fibras de curvatura de Gauss negativa y, en particular, para fibras hiperbólicas [2, 3, 4].

Superficies de curvatura media constante

Superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski

En relación al teorema de Alexandrov y al estudio de superficies espaciales de curvatura media constante (distinta de cero) en \mathbb{L}^3 , una primera diferencia sustancial con respecto al caso maximal es el hecho, ya observado por Treibergs [49] en 1982 de la existencia de una infinidad de superficies espaciales enteras de curvatura media constante distinta de cero. Otra diferencia sustancial, con respecto ahora al caso euclídeo, afecta a la *topología* de dichas superficies, puesto que toda superficie espacial y completa en \mathbb{L}^3 es *espacialmente entera*, en el sentido de que su proyección sobre el plano (x, y) es siempre un *difeomorfismo*. En particular, ello implica que en el espacio de Lorentz-Minkowski no existen superficies espaciales *cerradas*, es decir, *compactas y sin frontera*; dicho de otra forma, toda superficie espacial y compacta en \mathbb{L}^3 tiene necesariamente una frontera no vacía.

Por dicho motivo, el estudio de las superficies espaciales compactas de curvatura media constante en \mathbb{L}^3 es radicalmente distinto al caso euclídeo e involucra de manera irremediable el es-

tudio de su frontera. En este sentido, resulta natural preguntarse cómo influye la geometría de la frontera en la geometría de la superficie misma. Éste fue precisamente uno de los problemas que abordamos a finales del año 1996 con nuestro primer estudiante de doctorado, José Antonio Pastor, en lo que supuso nuestra *alternativa* como director de tesis [43].

En particular, en una primera aproximación al problema y en colaboración con el profesor Rafael López, de la Universidad de Granada, en nuestro trabajo [16] consideramos el estudio de superficies espaciales compactas en \mathbb{L}^3 de curvatura media constante H y teniendo como frontera una curva *de Jordan* plana Γ . Mediante el uso de unas novedosas *fórmulas de flujo* que no habían sido previamente consideradas en el caso lorentziano, fuimos capaces de demostrar que el área encerrada por la frontera Γ de una tal superficie se podía escribir en términos del flujo de su *conormal* $\vec{\nu}$ y venía dado por la siguiente expresión

$$\text{área}(\Omega) = \frac{1}{2H} \oint_{\Gamma} \langle \vec{\nu}, \vec{a} \rangle ds,$$

donde Ω representa el dominio plano encerrado por Γ y \vec{a} es el vector perpendicular al plano que contiene a la frontera. Como aplicación de esta fórmula del flujo, para el caso en que la frontera es una circunferencia pudimos concluir que las únicas superficies espaciales compactas en \mathbb{L}^3 con curvatura media constante y con frontera circular son los discos planos, en el caso en que $H = 0$, y los *casquetes hiperbólicos*, en el caso en que $H \neq 0$ (Figura 34).

Posteriormente en [21] conseguimos extender este resultado al caso de *hipersuperficies* de dimensión arbitraria. En esta misma dirección en [23] abordamos el problema para el caso de hipersuperficies con curvatura escalar constante en \mathbb{L}^{n+1} . En particular, en el caso de dimensión dos conseguimos caracterizar los casquetes hiperbólicos como las únicas superficies espaciales compactas y no llanas en \mathbb{L}^3 con curvatura de Gauss constante y frontera cir-

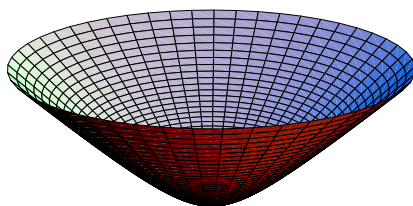


Figura 34: Casquete hiperbólico.

cular. De nuevo la demostración estaba basada en el uso de una nueva fórmula integral para el área encerrada por la frontera de la superficie.

Por otra parte, en [22] estudiamos un problema variacional para superficies espaciales del espacio de Lorentz-Minkowski con *frontera libre* en una cierta superficie *soporte* prefijada, cuyos *puntos críticos* resultan ser superficies espaciales de curvatura media constante que intersecan a la superficie soporte a lo largo de su frontera con ángulo *hiperbólico* constante. Nuevamente, en el caso en que la superficie soporte sea un plano espacial o un plano hiperbólico conseguimos caracterizar los discos planos y los casquetes hiperbólicos como las únicas soluciones del problema. En este caso la solución del problema está basada en la estructura compleja de la superficie en tanto que superficie de Riemann y utiliza de manera esencial el hecho conocido de que la condición de tener curvatura media constante implica que la *diferencial de Hopf* de la superficie es necesariamente *holomorfa*.

Superficies con borde en el espacio euclídeo

Volviendo de nuevo al espacio euclídeo, es interesante señalar que el problema de caracterizar las superficies compactas de curvatura media constante (distinta de cero) con frontera circular

permanece abierto. En esta dirección, teniendo en cuenta que el modelo matemático de una pompa de jabón apoyada sobre una circunferencia es el de una superficie compacta de curvatura media constante $H \neq 0$ con frontera circular, la experiencia física nos dice que una tal superficie debería ser un casquete esférico (Figura 35), por lo que resulta natural preguntarse si éstas son las úni-

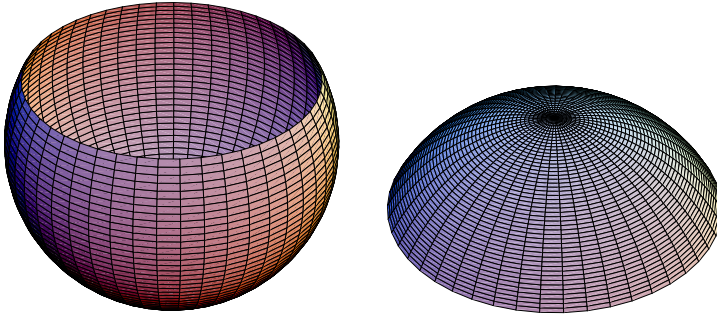


Figura 35: Casquetes esféricos.

cas soluciones al problema. Estrictamente hablando, la respuesta es *no*. Ya en 1991 Kapouleas [37] demostró que existen otras superficies compactas topológicamente muy complicadas, esto es, de *género grande*, que aparecen como superficies de curvatura media constante y con frontera circular, pero se trata de superficies *no embebidas*, es decir, superficies con *autointersecciones* que no se pueden realizar como subconjuntos propios del espacio euclídeo.

Sin embargo, si imponemos alguna restricción topológica *natural* como, por ejemplo, que la superficie sea embebida o que *no tenga agujeros*, no se conoce hasta la fecha ningún otro ejemplo distinto al del casquete esférico. Esta situación ha llevado a *conjeturar* que los casquetes esféricos deben ser las únicas superficies compactas y embebidas (o, alternativamente, sin agujeros) en el espacio euclídeo con curvatura media constante y frontera circular. Hasta la fecha, se conocen algunas resultados parciales que

vienen a confirmar dicha conjetura, si bien el problema sigue sin estar plenamente resuelto.

En esta dirección, en 1999 y en colaboración con Bennett Palmer y con Rafael López conseguimos aportar nuestro particular grano de arena a la solución del problema, demostrando que los casquetes esféricos son las únicas soluciones *estables* del problema con la topología de un disco, es decir, sin agujeros [15]. Aquí por *estable* se hace referencia a que, siendo puntos críticos del problema variacional de minimizar el área, las soluciones estables son las que, al menos localmente, ciertamente minimizan el área. La demostración de nuestro resultado está basada fuertemente en la estructura compleja de la superficie y, de nuevo, utiliza de manera fundamental el hecho de que la diferencial de Hopf de la superficie es holomorfa. Este enfoque del problema nos permitió, de hecho, extender dicho resultado al caso de superficies en los espacios esférico e hiperbólico de dimensión tres.

Por otra parte, en 2002 y en un trabajo conjunto con el profesor J. Miguel Malacarne [17], de la Universidad Federal del Espíritu Santo, en Brasil, abordamos el correspondiente problema para el caso de hipersuperficies de curvatura escalar constante y frontera esférica en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} . En este trabajo fuimos capaces de resolver la conjetura del casquete esférico para el caso de la curvatura escalar intrínseca y, más generalmente, para el caso de cualquier otra curvatura media *de orden superior*. En concreto, demostramos que las únicas hipersuperficies compactas embebidas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media de orden k constante H_k , $k \geq 2$, y con frontera esférica son las bolas redondas (con $H_k = 0$) y los casquetes esféricos (con $H_k \neq 0$). En particular, para el caso de superficies concluimos que las únicas superficies compactas embebidas en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss K constante y frontera circular son los discos planos (con curvatura de Gauss $K = 0$) y los casquetes esféricos (con $K > 0$).

La demostración que de este resultado dimos en [17] fue consecuencia de un resultado más general de simetría basado en el hecho de que, bajo ciertas condiciones de convexidad en la frontera, la hipersuperficie hereda todas las simetrías de su frontera. En particular, si la frontera es una esfera, la hipersuperficie hereda todas las simetrías de una esfera y ella misma debe ser una bola o un casquete esférico. Nuestro resultado en [17] fue parte de la tesis doctoral del profesor Malacarne [41], defendida en el año 2001 en la Universidad Federal del Ceará, en Brasil, y formó parte, así mismo, de un proyecto más general en colaboración con el profesor Jorge H.S. de Lira, de la citada universidad, en el que estudiamos nuevos resultados de simetría para hipersuperficies compactas de curvatura media constante en los espacios euclídeo, esférico e hiperbólico, y que dio lugar a un extenso artículo publicado en [14].

El principio del máximo de Omori-Yau

No podemos terminar esta breve muestra de lo que ha sido nuestra aportación al estudio de la geometría diferencial de superficies sin hacer una mención especial al llamado *principio del máximo de Omori-Yau*. Dicho principio debe su nombre al matemático japonés Hideki Omori, quien por primera vez detectó su validez para *variedades riemannianas completas* de curvatura *seccional* acotada inferiormente [46], y al matemático americano de origen chino Shing-Tung Yau, que extendió el rango de validez del principio al de variedades con curvatura *de Ricci* acotada inferiormente [50].

Con objeto de simplificar nuestra exposición, nos limitaremos nuevamente al caso de superficies bidimensionales. Entre los matemáticos es bien conocido el hecho de que sobre una superficie cerrada, es decir, compacta y sin frontera, toda función diferenciable u alcanza su *máximo* en algún punto P_0 de la superficie, y que en dicho punto se satisfacen las tres siguientes propiedades:

$$u(P_0) = u^* = \text{máx } u, \quad |Du(P_0)| = 0, \quad \text{y} \quad \Delta u(P_0) \leq 0, \quad (9)$$

donde, recordemos, Du y Δu denotan, respectivamente, el gradiente y el laplaciano de la función u . Para los que todavía guarden en su memoria alguna noción de las matemáticas que estudiaron en sus años de COU o Bachillerato, esto les puede recordar

la propiedad de que en todo punto x_0 de máximo de una función diferenciable $f(x)$ se cumple que

$$f(x_0) = f^* = \text{máx } f, \quad f'(x_0) = 0, \quad \text{y} \quad f''(x_0) \leq 0.$$

Siguiendo la nomenclatura introducida por Yau, la validez de (9) se conoce hoy en día como el *principio del máximo usual (o finito)*.

Evidentemente, cuando la superficie es completa pero no es compacta, como ocurre por ejemplo con \mathbb{R}^2 , para una función dada u acotada superiormente, es decir, con $u^* = \sup u < +\infty$, no siempre es posible encontrar un punto P_0 de la superficie en donde $u(P_0) = u^*$. En abril de 1967, un mes después de que yo naciera y en lo que se podría interpretar como una señal premonitrice de lo que el futuro nos podía deparar, Omori observó que, para superficies completas con curvatura de Gauss acotada inferiormente, se podía garantizar al menos la existencia de una *sucesión maximizante*, en el siguiente sentido: si u es una función acotada superiormente, con $u^* = \sup u < +\infty$, podemos garantizar la existencia de una sucesión de puntos $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en la superficie con las siguientes propiedades

$$u(P_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |Du(P_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad \Delta u(P_k) < \frac{1}{k}. \quad (10)$$

En relación a la necesidad de que la curvatura de Gauss esté acotada inferiormente para garantizar la existencia de dicha sucesión, el propio Omori encontró ejemplos de métricas completas en \mathbb{R}^2 cuya curvatura de Gauss decrece muy rápida y asintóticamente hacia el infinito negativo y para las cuales no se cumple la validez de dicha afirmación. Pocos años más tarde, Yau extendió su validez a variedades con curvatura de *Ricci* acotada inferiormente, aunque para el caso que a nosotros nos ocupa, el de superficies bidimensionales, esto no hace ninguna diferencia.

Por esta razón, y siguiendo la terminología introducida por Pigola, Rigoli y Setti en 2005 [44], decimos que una superficie satisface el principio del máximo de Omori-Yau si, dada cualquier

función u diferenciable y acotada superiormente sobre la superficie, siempre podemos garantizar la existencia de una sucesión de puntos $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en la superficie que cumplen las tres condiciones indicadas en (10). En este sentido, el principio del máximo de Omori-Yau establece que dicho principio es siempre válido para cualquier superficie completa con curvatura de Gauss acotada inferiormente.

Una aplicación típica del principio del máximo usual en el estudio de la geometría de superficies, y que nuestros alumnos de tercer curso de Matemáticas conocen (o, al menos, deberían conocer) es la demostración de que toda superficie cerrada de \mathbb{R}^3 tiene algún punto elíptico, esto es, algún punto donde la curvatura de Gauss es estrictamente positiva. Como consecuencia de esto resulta que no existen superficies minimales cerradas en \mathbb{R}^3 . Motivado por este hecho, y en lo que sería la primera aplicación del principio del máximo de Omori-Yau, el propio Omori demostró en [46] que no existen superficies minimales completas con curvatura de Gauss acotada inferiormente y contenidas en un cono de \mathbb{R}^3 .

En el contexto de la geometría de superficies espaciales en el espacio de Lorentz-Minkowski, la primera aplicación del principio del máximo de Omori-Yau fue la demostración, dada por Cheng y Yau en [31], del teorema de Calabi-Bernstein para superficies maximales. A partir de aquí, dicho principio se reveló como una herramienta muy útil en el estudio de la geometría global de superficies espaciales debido al hecho de que, bajo hipótesis de acotación de su curvatura media (y, en particular, si ésta es constante), tales superficies tienen curvatura de Gauss acotada inferiormente, lo que garantiza la validez del principio.

Fue precisamente en este contexto en el que, allá por el año 1992, descubrimos la utilidad y la aplicabilidad de dicho principio al estudio de la geometría de superficies. Desde entonces, el principio del máximo de Omori-Yau ha estado siempre presente

en nuestra trayectoria investigadora y ha sido una herramienta fundamental en muchos de nuestros resultados. Más recientemente, en el año 2008 y en colaboración con los profesores G. Pacelli Bessa, de la Universidad Federal del Ceará, en Fortaleza, y Marcos Dajczer, del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), en Rio de Janeiro, comprendimos que el rango de validez del principio iba mucho más allá del de las superficies completas con curvatura de Gauss acotada inferiormente. En particular, y gracias al trabajo desarrollado anteriormente por los italianos Pigola, Rigoli y Setti en [44], descubrimos que la validez del principio no dependía de la acotación inferior de la curvatura tanto como se podía esperar y que, de hecho, para su validez bastaba con garantizar la existencia de una cierta función *propia* sobre la superficie que cumpliera ciertas acotaciones en su gradiente y en su laplaciano. Ciertamente, para el caso de superficies completas con curvatura de Gauss acotada inferiormente dicha función venía dada en términos de la distancia intrínseca asociada. Pero en otras situaciones se podía garantizar la validez del principio mediante alguna otra función adecuada. Del mismo modo, supimos de la existencia de una versión *débil* del principio que resultaba ser equivalente al concepto probabilístico de *completitud estocástica* [45]. A raíz de ello, ante nosotros se abría todo un campo sin explorar en el que podíamos explotar de manera muy útil la validez del principio del máximo de Omori-Yau para extraer consecuencias geométricas.

Así, en nuestro artículo [8] publicado en *Mathematische Annalen*, decana revista alemana fundada en 1868 y que ha tenido entre sus editores a matemáticos de la talla de Felix Klein y David Hilbert, pudimos aplicar dicho principio al estudio de superficies (o, más generalmente, subvariedades) *cilíndricamente acotadas* en el espacio euclídeo y, en particular, proporcionar una respuesta afirmativa a una antigua conjetura de Calabi [27] sobre hipersuperficies minimales en \mathbb{R}^{n+1} que databa de 1965.

Finalmente, nuestro interés por profundizar en el estudio y entendimiento del principio del máximo de Omori-Yau desde una perspectiva más analítica nos llevó a contactar con el profesor Marco Rigoli, de la Universidad de Milán, en Italia, quien aceptó nuestra invitación para visitar la Universidad de Murcia e impartir un curso sobre los aspectos analíticos del citado principio. A partir de entonces, el profesor Rigoli, Marco para los amigos, se convirtió en un estrecho colaborador de nuestro grupo de investigación y, todo hay que decirlo, en un ferviente admirador de la gastronomía y climatología de nuestra querida tierra.

Desde el año 2009 hemos estado trabajando intensamente en colaboración con Marco Rigoli y su grupo de investigación de Milán en encontrar nuevas y más potentes versiones del principio del máximo, así como en establecer nuevas aplicaciones del mismo en diferentes contextos de la geometría de superficies. Este trabajo ha dado entre sus frutos la reciente publicación de una extensa monografía sobre el tema de casi 600 páginas titulada *Maximum principles and geometric applications*, que fue publicada en 2016 por la prestigiosa editorial Springer en su colección *Springer Monographs in Mathematics* [18].

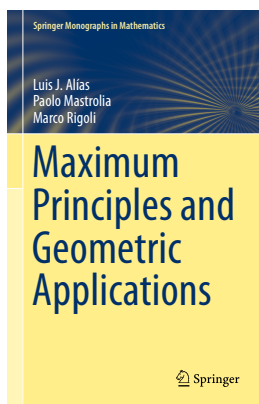


Figura 36: Maximum principles and geometric applications.

Bibliografía

- [1] A.L. Albuje, *Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 2008.
- [2] A.L. Albuje y L.J. Alías, *Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces*, *J. Geom. Phys.* **59** (2009), 620–631.
- [3] A.L. Albuje y L.J. Alías, *Parabolicity of maximal surfaces in Lorentzian product spaces*, *Math. Z.* **267** (2011), 453–464.
- [4] A.L. Albuje y L.J. Alías, *Calabi-Bernstein results and parabolicity of maximal surfaces in Lorentzian product spaces*. Recent trends in Lorentzian geometry, 49–85, Springer Proc. Math. Stat., 26, Springer, New York, 2013.
- [5] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large. V*, *Vestnik Leningrad. Univ.* **13** (1958), 5–8. Traducción al inglés en American Mathematical Society Translations, vol. 21, pp. 412–416, 1962.
- [6] L.J. Alías, *Caracterización y clasificación de superficies en el espacio tridimensional de Lorentz-Minkowski*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia, 1991.

- [7] L.J. Alías, *Caracterización y clasificación de hipersuperficies en los espacios pseudo-riemannianos de curvatura constante*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 1994.
- [8] L.J. Alías, G.P. Bessa y M. Dajczer, *The mean curvature of cylindrically bounded submanifolds*, *Math. Ann.* **345** (2009), 367–376.
- [9] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas, *Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta x = Ax + B$* , *Pacific J. Math.* **156** (1992), 201–208.
- [10] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas, *Submanifolds in pseudo-Euclidean spaces satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$* , *Geom. Dedicata* **42** (1992), 345–354.
- [11] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas, *Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$* , *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 1793–1801.
- [12] L.J. Alías y N. Gürbüz, *An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures*, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 113–127.
- [13] L.J. Alías y S.B.M. Kashani, *Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k x = Ax + b$* , *Taiwanese J. Math.* **14** (2010) 1957–1977.
- [14] L.J. Alías, J.H.S. de Lira y J.M. Malacarne, *Constant higher order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces*, *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), 527–562.
- [15] L.J. Alías, R. López y B. Palmer, *Stable constant mean curvature surfaces with circular boundary*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 1195–1200.
- [16] L.J. Alías, R. López y J.A. Pastor, *Compact spacelike surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski 3-space*, *Tohoku Math. J. (2)* **50** (1998), 491–501.

- [17] L.J. Alías y J.M. Malacarne, *Constant scalar curvature hypersurfaces with spherical boundary in Euclidean space*, Rev. Mat. Iberoam. **18** (2002), 431–442,
- [18] L.J. Alías, P. Mastrolia y M. Rigoli, *Maximum principles and geometric applications*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016. xvii+570 pp.
- [19] L.J. Alías y B. Palmer, *On the Gaussian curvature of maximal surfaces and the Calabi-Bernstein theorem*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 454–458.
- [20] L.J. Alías y B. Palmer, *A duality result between the minimal surface equation and the maximal surface equation*, An. Acad. Bras. Ciênc. **73** (2001), 161–164.
- [21] L.J. Alías y J.A. Pastor, *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz-Minkowski space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 85–93.
- [22] L.J. Alías y J.A. Pastor, *Spacelike surfaces of constant mean curvature with free boundary in the Minkowski space*, Classical Quantum Gravity **16** (1999), 1323–1331.
- [23] L.J. Alías y J.A. Pastor, *Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the Lorentz-Minkowski space*, Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), 75–83.
- [24] S. Bernstein, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet*, Math. Ann. **69** (1910), 82–136.
- [25] S. Bernstein, *Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **27** (1910), 233–256.
- [26] E. Bombieri, E. De Giorgi y E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.

- [27] E. Calabi, *Problems in differential geometry*. S. Kobayashi, y J. Eells Jr. (editores), Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965, p. 170. Nippon Hyoronsha, Tokyo (1966)
- [28] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*. Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, pp. 223–230.
- [29] B.Y. Chen, *Total mean curvature and submanifolds of finite type*. Series in Pure Mathematics, 1. World Scientific Publishing Co., Singapur, 1984.
- [30] B.Y. Chen, *Total mean curvature and submanifolds of finite type. Second Edition*. Series in Pure Mathematics, 27. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2014.
- [31] S.Y. Cheng y S.T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), 407–419.
- [32] P. Dombrowski, *150 years after Gauss*, Astérisque, vol. 62, 1979.
- [33] L. Euler, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin **16** (1767), 119–143.
- [34] K.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curva*, Commentationes Societatis Regiae Scientorum Gottingnensis Recentiores, vol. 6, Göttingen 1828. Traducción al inglés de A. Hiltebeitel y J. Morehead en Raven Press Books, 1965. Véase también [32].
- [35] S. Germain, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, J. Reine Angew. Math. **7** (1831), 1–29.

- [36] P. Hartman y L. Nirenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901–920.
- [37] N. Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, J. Differential Geom. **33** (1991), 683–715.
- [38] J.L. Lagrange, *Essai d’une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Miscellanea Taurinensia **2** (1760-1), 173–95; *Oeuvres de Lagrange*, Vol. I, Gauthiers-Villars, París, 1867, 335–62.
- [39] G. Leibniz, *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, Acta Eruditorum (June 1686), 289–292.
- [40] A. Lichnerowicz, *L’intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 37–63.
- [41] J.M. Malacarne, *Fórmulas do Fluxo, Simetrias e r -Curvatura Média Constante*, Tesis Doctoral, Universidade Federal do Ceará, 2001.
- [42] J.B.M.C. Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés par div. Savans **10** (1785), 477–510.
- [43] J.A. Pastor, *Hipersuperficies espaciales de curvatura constante en el espacio de Lorentz-Minkowski*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 1999.
- [44] S. Pigola, M. Rigoli y A.G. Setti, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **174** (2005), no. 822, x+99 pp.
- [45] S. Pigola, M. Rigoli y A.G. Setti, *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1283–1288.

-
- [46] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967) 205–214.
- [47] H.F. Ramírez Ospina, *Hipersuperficies en los espacios forma pseudo-riemannianos satisfaciendo $L_k\psi = A\psi + b$* , Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 2014.
- [48] B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen*. Habilitationsschrift 1854.
- [49] A. Treibergs, *Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Invent. Math. **66** (1982), 39–56.
- [50] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Commun. Pure Appl. Math. **28** (1975) 201–228.

**Discurso de contestación
a cargo del Académico de Número
Dr. Pascual Lucas Saorín**

Un matemático debe ser más útil que cualquier otro miembro de su tribu.

(Proverbio chino)

Signor Sarsi, la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

(Galileo Galilei en «Il Saggiatore», 1623).

Excmo. Sr. Presidente
Dignísimas Autoridades
Ilmos. Sres. Académicos
Señoras y Señores

Deseo manifestar, en primer lugar, el agradecimiento sincero a los miembros de la Academia de Ciencias por haberme concedido el honor de contestar al discurso de ingreso del nuevo Académico de Número, el profesor Dr. D. Luis José Alías Linares. Este honor es mayor, si cabe, al tratarse de la primera recepción de un nuevo matemático en esta Academia.

Es habitual en una Laudatio de contestación al nuevo Académico glosar su currículum científico y contestar a la lección de ingreso. Yo también lo haré, aunque de forma sucinta. Me gustaría haber encontrado las palabras adecuadas para transmitirles la importancia y brillantez del prof. Alías en el ámbito de la Geometría Diferencial, así como sus cualidades personales y humanas más destacadas.

El prof. Alías nació hace 50 años y, en condiciones normales, lo habría hecho en Santiago de Compostela, destino del padre, pero como era tradición familiar nació en Molina de Segura. Aunque parece que de joven no le entusiasmaba reconocerlo, hoy se siente muy orgulloso de ser molinense. Cursó los estudios de Matemáticas en la Universidad de Murcia, que finalizó en 1990 con Premio Extraordinario de Licenciatura y Premio Nacional de Terminación de Estudios. Se incorporó a la Universidad en 1991 como Becario Predoctoral del MEC para realizar su tesis doctoral con el Dr. Ángel Ferrández, quien me ofreció la codirección que acepté encantado. Y ese es el preciso momento en que conocí al

prof. Alías: yo andaba preparando la defensa de mi tesis doctoral y él empezando la suya, que sólo tres años después defendió brillantemente y que trataba sobre la caracterización y clasificación de hipersuperficies en los espacios pseudo-riemannianos de curvatura constante. La excelente tesis le proporcionó, no haría falta decirlo, el Premio Extraordinario de Doctorado.

En cuanto a su formación académica, y por completar estos datos, debo mencionar también, aunque no me extenderé en ello, que el prof. Alías tiene a medio terminar los estudios de Medicina. Así pues, podemos decir que esta es la historia de un médico frustrado y que, sin embargo, llegó a ser doctor. Porque, en efecto, la inmensa mayoría de los médicos no son doctores y la inmensa mayoría de los doctores no son médicos. No obstante, nuestro Académico electo ha logrado vengarse de su destino y dos de sus hijas ya se han echado en los brazos de Hipócrates.

Si tuviéramos que estimar los méritos curriculares del Dr. Alías sobre la base de sus publicaciones, contamos 111 de ellas, entre artículos en revistas internacionales de investigación y capítulos de libro, así como 3 libros de investigación, el último de ellos publicado en 2016 en la prestigiosa editorial Springer, y dedicado al principio del máximo y sus aplicaciones geométricas. Además, ha presentado más de 50 comunicaciones en congresos científicos internacionales, muchas de ellas en calidad de ponente invitado, y ha conferenciado en innumerables departamentos y centros de investigación a lo largo y ancho del mundo. Nuestro nuevo Académico fue Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia 2002: Ciencia y Tecnología (la primera vez que se convocaba este premio), es revisor de numerosas publicaciones nacionales e internacionales, ha sido adjunto a la coordinación del área de Matemáticas de la ANEP (Agencia Nacional de Evaluación y

Prospectiva), evaluador de proyectos de diversas instituciones y agencias, tanto nacionales como internacionales.

El Dr. Alías es un viajero incansable, que va difundiendo el nombre de nuestra Región y de la Universidad de Murcia por todos los confines académicos y siempre con connotaciones positivas. Su afición por viajar la cultivó desde el comienzo de su vida investigadora. Recién leída su tesis doctoral pasó un año en la Universidad de Durham (Reino Unido), donde se especializó en la geometría conforme de las superficies en espacios de Lorentz, en particular en las aplicaciones al caso de superficies de curvatura media constante y superficies de Willmore. En el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, el Dr. Alías iniciaría sus visitas periódicas a dos centros de investigación muy importantes (en particular, en geometría diferencial): el Departamento de Matemáticas de la Universidad Federal de Ceará (Fortaleza, Brasil) y el Instituto de Altos Estudios Científicos (IHES) en Bures-sur-Yvette (Francia), centros que volvería a visitar varias veces en años posteriores.

Quisiera hacer aquí un inciso sobre las circunstancias personales de su estancia en Durham. En esa época, Mari Carmen, su esposa, ya era su novia. Cuando surgió la posibilidad de realizar una estancia postdoctoral en Durham, Luis se ilusionó porque comprendió que su carrera investigadora podría alcanzar cotas que no eran posibles en Murcia. Sin embargo, había algo que le atormentaba (o le preocupaba, para no ser dramáticos): estaría separado de Mari Carmen mucho tiempo, un tiempo que una pareja de jóvenes enamorados necesitaba. Y aquí es donde Mari Carmen empezó ya a actuar de fiel compañera y apoyo de Luis: sin dudarle, se casaron y se trasladaron al Reino Unido. Tras un año en Durham, Luis regresó a Murcia en septiembre de 1995 con nuevos teoremas y líneas de investigación, y con algo mucho más

importante. Marcharon dos y regresaron tres, pues en noviembre nació su primera hija, Carmela.

En este año conmemorativo de insignes géometras como Jean Gaston **Darboux** (1842–1917), Ferdinand Georg **Frobenius** (1849–1917), Giuseppe **Veronese** (1854–1917) y Eugenio Elia **Levi** (1883–1917) no podíamos haber realizado mejor elección para el ingreso de un nuevo Académico. Pues como dijo Guido Fubini al glosar el trabajo de Levi (que yo me permito aplicar a nuestro nuevo Académico) «casi siempre aborda cuestiones de importancia fundamental, no se desanima con las dificultades, por grandes que sean, que hayan encontrado otros matemáticos, y con un análisis profundo, a menudo simple e ingenioso, es capaz de clarificarlas y superarlas».¹

Hemos escuchado su magnífica lección de ingreso, que seguro han entendido a la perfección pues con toda intención y mimo la preparó «a la medida de Purita y sus amigas». Ha puesto todo su empeño en llamar su atención sobre un concepto fundamental, la curvatura, que nos da una medida de «cuánto se dobla un objeto». Ha sido una lección magistral, que ha intentado con éxito mostrarnos una línea de investigación sólida, de gran repercusión internacional, en la frontera del conocimiento y de imprevisibles aplicaciones, pues no en vano va dando pasos con seguridad y precisión hacia el conocimiento de la Geometría y Topología del Universo.

Nadie duda que la Matemática está de moda, está presente en la sociedad actual como jamás antes lo había estado, pero esta circunstancia raramente es reconocida. Es conveniente, y hasta necesario, que los ciudadanos se familiaricen con las situacio-

¹G. Fubini y G. Loria: Eugenio Elia Levi (1883-1917), *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche* 20 (1918), 38–45.

nes matemáticas de forma que les sirvan de ayuda en la toma de decisiones, cada vez más complicadas, que tienen que realizar. Vivimos inmersos en un océano de números: efemérides personales y sociales, documentos de identidad, tarjetas y cuentas bancarias, porcentajes de infectados por el virus de la gripe, tasas de inflación, prima de riesgo, estadísticas de parados, etc. son sólo algunos de los ejemplos de esta realidad numérica que nos envuelve.

La naturaleza nos ofrece por doquier bellas formas con un rico contenido geométrico, tales como las espirales de las caracolas, de las margaritas y de las piñas, la geometría fractal de la coliflor y del brócoli, o la perfección de los minerales cristalizados. También las encontramos en el arte: los mosaicos de la Alhambra, la perspectiva del Renacimiento, el cubismo, la pintura de Vasarely o los grabados de Escher son algunos ejemplos. Y no es difícil encontrar otros ejemplos en la arquitectura o en la ingeniería.

Nuestra salud y bienestar dependen de técnicas que involucran gran cantidad de métodos y algoritmos matemáticos. En los hospitales se diagnostican diariamente tumores mediante Tomografía Axial Computarizada (el famoso TAC). Y el paciente se maravilla de la destreza de los médicos y enfermeras que le atienden, así como de la avanzada tecnología de las máquinas que emplean, pero seguramente desconoce que los cálculos realizados por el ordenador son el resultado de profundas teorías matemáticas, que convierten en nítidas imágenes de los tejidos los datos numéricos que miden la pérdida de intensidad de las ondas electromagnéticas que los atraviesan.

Y tantos otros ejemplos que nos pasan desapercibidos. ¿Cómo funciona el GPS? ¿Cómo se hacen los cálculos para dosificar un medicamento? ¿De qué manera llegan a nuestros conocidos

las fotografías que enviamos a través del teléfono móvil? ¿Cómo se previene y controla la propagación de una epidemia? Las respuestas a esas preguntas involucran resultados y algoritmos matemáticos muy ingeniosos y nada triviales.

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. Los hay desde los más sencillos, como sumar dos números, hasta los muy complicados, como los que comprimen la información de un video, o realizan las búsquedas en internet, o codifican el lenguaje de una charla telefónica a través de nuestro móvil.

Desde la Segunda Guerra Mundial, la influencia de la Matemática en la tecnología ha ido creciendo vertiginosamente, de manera que el tiempo de la llamada «alta tecnología» es, en gran medida, el de la «tecnología matemática». Ahí están los ordenadores, pero también el diseño de aviones como el Airbus, o los modernos sistemas de comunicación, todos ellos basados en sofisticados programas matemáticos que, cuando no se les presta la debida atención, o no son usados correctamente, pueden producir auténticos desastres, como ocurrió con el reciente hundimiento de una plataforma petrolífera en el Mar del Norte, debido a que los ingenieros que la diseñaron no realizaron correctamente el análisis numérico de los esfuerzos que habían de soportar sus columnas. La seguridad de las comunicaciones, basada en el cifrado de mensajes, y el tratamiento de imágenes tienen también una importante base algorítmica.

Cabría deducir de estos, y otros muchos ejemplos, que la Matemática es ubicua y que así debería ser percibido por los ciudadanos. Sin embargo, nada hay más alejado de la realidad, ya que generalmente sucede todo lo contrario: la Matemática resulta tan inadvertida como invisible para la gran mayoría de los

ciudadanos. Eso no impide que estos mismos ciudadanos, con independencia de su formación científica o matemática, reconozcan que la Matemática es una ciencia especial, distinta a las demás.

En palabras de Albert Einstein «una de las razones por las que la Matemática goza de esa estima especial, sobre las otras ciencias, es que sus proposiciones son absolutamente ciertas e indiscutibles, mientras que las de todas las demás ciencias son, en alguna medida, discutibles y en constante peligro de ser revocadas (o matizadas) por hechos recién descubiertos. Hay otra razón para la alta reputación de la Matemática, ya que es ella la que proporciona al resto de disciplinas científicas una cierta medida de certeza y rigor, que sin la Matemática no podrían alcanzar».

La Matemática en general, y particularmente la Geometría, debe su existencia a la necesidad de dar sentido y conocer el comportamiento del mundo real. La palabra misma Geometría, que, por supuesto, significa «medida de la Tierra», demuestra esto. Es evidente que el sistema de conceptos, axiomas y postulados de una geometría axiomática por sí solo no puede hacer afirmaciones en cuanto al comportamiento de los objetos reales, y es a ellos a quienes podremos aplicar la Geometría de Euclides.

Así vista, la Geometría es una ciencia natural, a veces considerada como la rama más antigua de la Física. Sus afirmaciones descansan esencialmente en la observación de la naturaleza y se podría llamar «geometría práctica» para distinguirla de la «geometría axiomática». La cuestión de si la geometría del universo es euclidiana o no, tiene un significado claro, y su respuesta sólo puede ser proporcionada por la experiencia. Como señaló Einstein: «Todas las medidas de longitud en Física constituyen geometría práctica en este sentido, así también las mediciones de longitud geodésica y astronómica, si se utiliza la ley empírica de que la luz

se propaga en línea recta y, de hecho, en línea recta en el sentido de la geometría práctica. Presto especial importancia a la visión de la geometría que acabo de exponer, porque sin ella habría sido incapaz para formular la Teoría de la Relatividad».

Hoy tenemos aquí uno de sus cultivadores más activos de este país. Hace un año, el profesor Antonio Córdoba Barba, murciano de pro, fue investido Académico de Honor por nuestra institución, en base a sus excepcionales logros científicos, los mismos que fueron aducidos para que la Universidad de Murcia lo investiera como Doctor Honoris Causa hace poco más de un mes. Sin ánimo de comparar, nada más lejos de nuestra intención, sino simplemente para proporcionar una medida de lo acertado que es la incorporación del Dr. Alías a nuestra institución, debemos señalar que ambos tienen idéntico índice de Hirsch, pero el Dr. Alías con veinte años menos.

A pesar de la importancia capital que la Matemática ha tenido en el desarrollo científico y tecnológico de nuestro mundo, como hemos indicado anteriormente, la cultura (y me refiero fundamentalmente a la literatura y el cine) ha manifestado muy poco interés por dar a conocer la vida y/o obra de matemáticos célebres. Cualquiera puede recordar alguna biografía sobre personajes célebres de otras disciplinas: pintores, políticos, escritores, cantantes, e incluso bandidos y ladrones. Además, las escasas obras en las que aparecen matemáticos no tratan, como elemento principal de la trama, los logros matemáticos del personaje, si no que se centran en aspectos más literarios o cinematográficos: la superación de una enfermedad, una historia romántica, cuestiones racistas, etc. Respecto al matemático investigador o al profesor de matemáticas, el cine ha mostrado casi siempre el estereotipo más popular: un personaje despistado, siempre centrado en su mundo particular y alejado de la realidad cotidiana, algo excéntrico (por no

decir raro o extraño), tanto en su personalidad (normalmente tímido y no muy atractivo) como en su indumentaria (generalmente desaliñado). Con alguna (o varias) de estas características todos recordamos, por ejemplo, el matemático **John Nash** en *Una mente maravillosa* (interpretado por Russell Crowe) o el matemático tranquilo y pacífico (aunque sólo al principio de la película) que interpreta **Dustin Hoffman** en *Perros de paja*.

Afortunadamente, el Dr. Alías rompe con todos estos estereotipos. Desde muy pequeño era despierto, extrovertido y muy luchador, siempre quería ser el mejor: su gran preocupación mientras estudiaba Matemáticas era si lograría, o no, la matrícula de honor en todas las asignaturas. Bueno, esa ambición por ganar y sobresalir no la ha perdido. Y este carácter ganador hizo que desde muy joven se decantase por la práctica de deportes individuales (como el ciclismo o el atletismo), donde podía demostrar todo su potencial. Una excepción a esto es el fútbol que, a pesar de ser un deporte en equipo, también le gustaba. Y en él también demostraba unas cualidades excepcionales, aunque no como creador de juego, si no más bien todo lo contrario. Vamos, que era de la escuela de mi paisano José Antonio Camacho, defensa del Real Madrid de los años 70 famoso porque o pasaba el balón o pasaba el delantero, pero no los dos. Pero volvamos a sus dos deportes favoritos. No piensen que los practica como un hobby suave y placentero, en plan fin de semana. No. Luis siempre exige, y se exige, lo máximo, y por eso no resulta extraño ni sorprendente que haya participado en varios maratones y pruebas de Ironman. Para quien no lo sepa, Ironman es la prueba más dura del triatlón; consta de 3,86 km de natación, 180 km de ciclismo y 42,2 km de carrera a pie (un maratón). Y, sin embargo, tiene aversión a la cocina. Por eso, porque conocemos tu espíritu competitivo y sabemos que te apasionan los retos, quiero aprovechar la ocasión, delante de esta

distinguida audiencia, para proponerte dos desafíos: el primero, que mejores tus habilidades culinarias y seas capaz de agasajar a tu familia con una exhuberante comida; y el segundo, seguramente más fácil, que publiques un artículo en una revista fetiche, como los *Annals* de Princeton.

Su inquieta y brillante mente investigadora es una fuente inagotable de problemas cuyas soluciones conducen a resultados que, una vez probados, se publican en forma de teoremas como contribución al progreso del conocimiento. El Dr. Alías es autor de una buena colección de ellos, la mayoría en coautoría. No me cabe la menor duda de que sus mejores teoremas, también en coautoría, tienen nombres propios: Carmela, Esperanza, Aurora y Luisito.

Antes de finalizar, hagamos un viaje al pasado. En el acto de constitución de esta Academia, el 13 de junio de 2002, el Dr. Ferrández, entonces Presidente de la misma, finalizaba su discurso con estas sentidas palabras (cito textualmente):

Permítanme un recordatorio emocionado, para un caballero de la Ciencia, humilde y honrado, maestro de tantas generaciones, quien hoy merecería y nos gustaría tener con nosotros, pero desgraciadamente cautivo de una enfermedad: Dr. D. Luis Alías Pérez. Querido Luis, hoy te tenemos en el corazón.

Han pasado quince años y, afortunadamente, esa deuda con la historia ha sido saldada. Ya tenemos un Luis Alías en nuestra institución.

En nombre de todos los compañeros de esta Academia de Ciencias de la Región de Murcia, bienvenido seas Luis. Esperamos y

deseamos mucho de tus excepcionales condiciones tanto personales como científicas, para que esta Academia pueda alcanzar sus cometidos. Te felicito y hago extensiva esta felicitación a tu familia, en especial a tu mujer Mari Carmen, a tus hijos Carmela, Esperanza, Aurora y Luisito, y a tu madre, Doña Purita.

Muchas gracias a todos por su paciencia y amable atención.

