ACADEMIA DE CIENCIAS DE LA REGIÓN DE MURCIA

BREVE HISTORIA DE LA CURVATURA

Discurso del Académico

Ilmo. Sr. D. Pascual Lucas Saorín

Catedrático de Geometría y Topología,
leído en la sesión solemne de inicio del curso académico
el día 9 de enero de 2020

ACADEMIA DE CIENCIAS de la REGION DE MURCIA

Academia asociada al Instituto de España

INSTITVTO Ð ESPAÑA

Academia de Ciencias de la Región de Murcia

Breve historia de la curvatura

Discurso del Académico

Ilmo. Sr. D. Pascual Lucas Saorín

Catedrático de Geometría y Topología, leído en la sesión solemne de inicio del curso académico el 9 de enero de 2020

Murcia 2019

Academia asociada al Instituto de España

Este discurso se ha impreso con subvención de
la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia,
a quien agradecemos su ayuda.

ISBN: 978-84-09-17163-7
Depósito legal: MU 1384-2019

Imprime: Compobell S.L., Murcia

Discurso del Académico de Número
Ilmo. Sr. D. Pascual Lucas Saorín

There is nothing in the world
except empty curved space.
Matter, charge, electromagnetism, and other fields
are only manifestations of the curvature of space.
Physics is geometry.

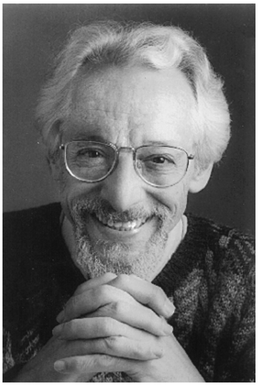
John Archibald Wheeler (1911–2008)
en *Geometrodynamics* (1962), [48, p. 225].

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry.

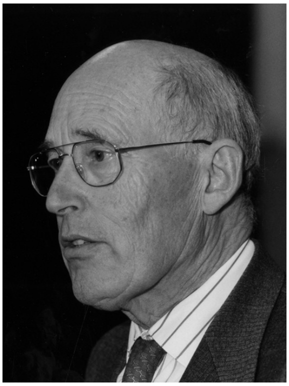
Bertrand Russell (1872–1970)
en *The Study of Mathematics* (1919), [41, p. 60].

Introducción

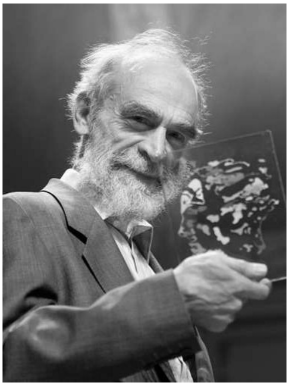
El concepto de curvatura es muy familiar en Matemáticas, en particular en Geometría Diferencial. El mundo en que vivimos, y los modelos matemáticos que describen los objetos geométricos y físicos, no pueden ser adecuadamente descritos utilizando solamente construcciones lineales. Para conseguir una adecuada descripción de la Naturaleza es necesario, por tanto, introducir modelos en los cuales las variables y parámetros estén relacionados por ecuaciones más complicadas que las ecuaciones lineales. Así es como, sin darnos cuenta, aparece de un modo natural el concepto de curvatura.



R. Osserman
Fuente: Stanford Univ.



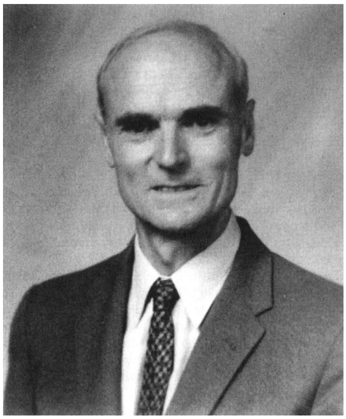
M. Berger
Fuente: IHES



M. Gromov
Fuente: Britannica

De acuerdo con **Robert Osserman** (1926–2011), [36, p. 731], la noción de curvatura es uno de los conceptos principales de la Geometría Diferencial; incluso podría decirse que es el concepto central, distinguiendo el contenido geométrico de otros aspectos que son analíticos, algebraicos o topológicos. Según **Marcel Berger** (1927–2016), [3, p. 9], la curvatura es el invariante más importante de la geometría riemanniana, y también el más natural. Pero **Mikhail Gromov** (1943), ganador del Premio Abel en 2009, nos hace ver en [21, p. 10] la complejidad del concepto, al escribir que «el tensor curvatura de una variedad de Riemann es un pequeño monstruo del álgebra multilineal cuyo completo significado geométrico permanece en la oscuridad».

La curvatura también juega un papel fundamental en física y otras ciencias experimentales. Por ejemplo, la fuerza requerida para mover un objeto a velocidad constante es, de acuerdo con las leyes de Newton, un múltiplo constante de la curvatura de su trayectoria; y el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio está determinado, según la teoría de la relatividad de Einstein, por la curvatura del espacio-tiempo.



H. S. M. Coxeter
Fuente: Wikimedia Commons

Mucha gente desconoce que hace poco más de dos siglos tuvo lugar una revolución en el campo de la Geometría que fue científicamente tan profunda como la revolución de Copérnico en Astronomía y, en su impacto, tan filosóficamente importante como la teoría de la evolución de Darwin. En palabras del gran geómetra canadiense **Harold Scott MacDonald Coxeter** (1907–2003): «El efecto del descubrimiento de la geometría hiperbólica sobre nuestras ideas de verdad y realidad ha sido tan profundo que difícilmente podemos imaginar lo traumático que fue descubrir en 1820 que una geometría distinta de la euclídea era posible». Antes de esto se pensaba que había, y que de hecho realmente existía, sólo una geometría posible, y que cualquier descripción del espacio contraria a la exposición euclidiana debía ser necesariamente incompatible y contradictoria.

Hoy se sabe, sin embargo, que el modelo físico que usamos para describir el mundo macroscópico (*la teoría de la relatividad general*) está íntimamente relacionado con las geometrías no euclídeas, que fueron posteriormente incorporadas en una teoría geométrica más general por **G. F. Bernard Riemann** (1826–1866); es este marco más general el que permitió a **Albert Einstein** (1879–1955) el desarrollo de su teoría.

Los Elementos de Euclides

Comencemos por el principio. Platón, discípulo de Sócrates, estableció su escuela, «La Academia», en un área sagrada de Atenas. Era como una pequeña Universidad donde el filósofo y sus colegas enseñaban a los estudiantes. A Platón le gustaban mucho las Matemáticas, especialmente la Geometría. La leyenda dice que en una inscripción grabada en la puerta de la Academia se leía «*Que no entre nadie que no conozca la geometría*».

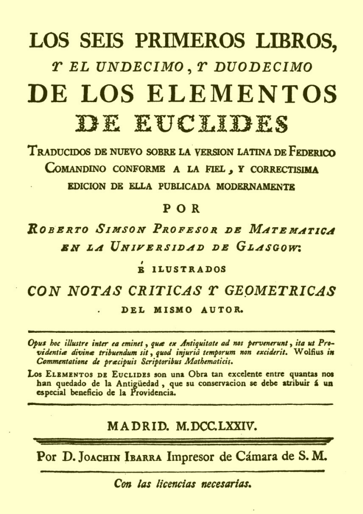
Cuando **Euclides** (ca. 325 a. C. – ca. 265 a. C.), o algunos de los miembros de su escuela, escribió los *Elementos*, los primeros cinco postulados eran tan evidentes que debían ser aceptados sin demostración. La curvatura está presente en ellos, aunque no explícitamente. Los cinco postulados son bien conocidos y en su redacción habitual dicen lo siguiente[1]:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. *Postulado de las paralelas*. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela. Esta redacción del quinto postulado es realmente un enunciado equivalente debido a **John Playfair**

[1] En las primeras traducciones al español la redacción es un poco distinta, sobre todo los tres primeros postulados, ya que se enuncian como construcciones que pueden hacerse. Por ejemplo, en [9] estos postulados se traducen como sigue: 1. Tirar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto; 2. Una línea recta puede extenderse continua y derechamente; 3. Sobre cualquier centro y distancia describir un círculo.

(1748–1819). La versión original es algo más complicada y dice así: «Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado es menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos».

Los Elementos rivalizan, en difusión, con los libros más famosos de la literatura universal: la *Biblia*, la *Divina Comedia* o el *Quijote*. Esto es realmente sorprendente, pues es un texto científico que no es accesible al público general. Pero su rigor lógico (que en parte contribuyó a la consolidación del pensamiento matemático tal y como lo conocemos hoy) y la unidad de su contenido lo convierten en un texto excepcional.



LOS SEIS PRIMEROS LIBROS,
Y EL UNDECIMO, Y DUODECIMO
DE LOS ELEMENTOS
DE EUCLIDES
TRADUCIDOS DE NUEVO SOBRE LA VERSION LATINA DE FEDERICO COMANDINO CONFORME A LA FIEL, Y CORRECTISIMA EDICION DE ELLA PUBLICADA MODERNAMENTE
POR
ROBERTO SIMSON PROFESOR DE MATEMATICA EN LA UNIVERSIDAD DE GLASGOW:
É ILUSTRADOS
CON NOTAS CRITICAS Y GEOMETRICAS
DEL MISMO AUTOR.

Opus hoc illustre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut Providentiæ divinæ tribuendum sit, quod injuriâ temporum non exciderit. Wolfius in *Commentatione de præcipuis Scriptoribus Mathematicis.*

Los ELEMENTOS DE EUCLIDES son una Obra tan excelente entre quantas nos han quedado de la Antigüedad, que su conservacion se debe atribuir á un especial beneficio de la Providencia.

MADRID. M.DCC.LXXIV.

Por D. JOACHIN IBARRA Impresor de Cámara de S. M.

Con las licencias necesarias.

Portada de la traducción al español de 1774, [10].

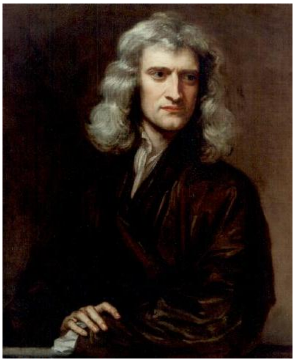
Euclides define la línea recta como la que «se extiende igualmente entre sus puntos», [10], o la que «igualmente está entre sus puntos», [9], pero la idea dinámica de que una línea recta es generada por un punto que se mueve sin cambiar de dirección no es una idea de Euclides y no está claro en qué momento nace. El concepto de dirección está íntimamente relacionado con el de vector y parece haber consenso en que no es una idea primaria de la geometría.

Es evidente que los matemáticos griegos eran conscientes de que había diferentes tipos de curvas (entendidas como lugares geométricos). Aristóteles, según **Proclus de Lycie** (412–485) [38, p. 85], afirma que hay tres clases de movimiento: el movimiento en una línea recta, el movimiento en una circunferencia y el movimiento mixto. La idea fundamental es muy intuitiva: hay curvas que son rectas y otras que no lo son, que están *curvadas* (parece un juego de palabras). Pero el proceso de cuantificar cómo de curvada está una curva no fue un proceso sencillo ni rápido.

El precursor: Nicolás Oresme

El nacimiento del concepto de curvatura de una curva plana suele datarse a finales del siglo XVII, y su paternidad se la disputan los creadores del cálculo infinitesimal: Leibniz y Newton, que es tanto como decir la matemática europea continental y la matemática inglesa.

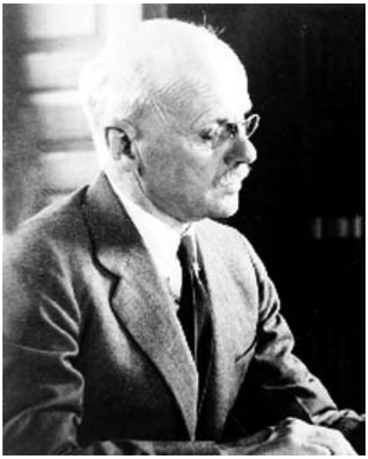
El origen de la disputa se explica fácilmente. En 1684, **Gottfried Leibniz** (1646–1716) publicó su obra *Nova methodus pro maximis and minimis*, [27], el primer artículo donde Leibniz muestra su nuevo método, y en 1686 publica *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, [28], donde introduce la circunferencia osculatriz, pero no la expresión de su radio de una forma analítica. Por otro lado, **Isaac Newton** (1643–1727) escribió en 1671 su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, [34], pero no se publicó hasta 1736, después de su muerte, cuando vio la luz una traducción al inglés de su trabajo. En cualquier caso, y con la perspectiva que nos da el tiempo, hoy no hay controversia pues ambos matemáticos trabajaron simultánea e independientemente en la nueva disciplina, por lo que son considerados coautores de la misma.


G. Leibniz I. Newton L. Euler
Fuente: Wikimedia Commons

Las ideas incipientes de Leibniz y Newton fueron perfeccionadas por **Leonhard Euler** (1707–1783), quien inició el estudio sistemático de la geometría de las curvas, introduciendo los conceptos de *longitud* y *curvatura*.

Signifique curvatura lo que signifique, intuitivamente debe ser algo que nos mida lo que una curva se aleja de ser una línea recta. En este sentido, y podríamos incluso postularlo por ser evidente, una circunferencia es una curva que está igual de curvada en todos sus puntos. También es intuitivo que cuanto mayor sea el radio de la circunferencia, menor curvatura tendrá; y recíprocamente, cuanto menor sea el radio de la circunferencia, más curvada estará la circunferencia. En consecuencia, la relación entre la curvatura de una circunferencia y su radio es inversa. El quid de la cuestión es en qué momento, y por qué, se decidió que la curvatura de una circunferencia de radio R era exactamente igual a $1/R$. Esto, que hoy nos parece simple y natural, fue muy complicado de incorporar al conocimiento matemático. La cuestión de la curvatura está íntimamente conectada, por tanto, con el centro de curvatura.



J. L. Coolidge
Fuente: www.math.harvard.edu

En un artículo publicado en 1952, [6], **Julian Lowell Coolidge** (1873–1954) señala que la historia de la curvatura le parece insatisfactoria, y escribe que «el primer autor que proporciona una indicación sobre la definición de curvatura es el escritor del siglo XIV Nicolás Oresme, cuyo trabajo he conocido gracias a Carl Boyer». Y entonces Coolidge añade: «Oresme concibió la curvatura de la circunferencia como el inverso del radio; ¿cómo llegó a esta conclusión?» Las condiciones científicas del siglo XIV hacen que este descubrimiento sea excepcional y nos hacen plantearnos la cuestión de cómo pudo llegar a ella. Recientemente, en un artículo publicado en 2015, los autores **I. M. Serrano** y **B. D. Suceava**,

[43], describen «cómo un estudioso del siglo xiv (i) dio una definición correcta para la curvatura de las circunferencias e intentó extender dicha definición a curvas generales, (ii) intentó aplicar la curvatura para comprender el comportamiento de los fenómenos de la vida real, y (iii) produjo en su investigación un resultado que anticipaba el teorema fundamental de curvas en el plano».

Como también señala **J. A. Ramírez Cruz** en 2007, en sus *Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme*, [39]: «El proceso de matematización de los fenómenos físicos, que [. . .] constituye una piedra angular de la revolución científica, no comienza en el siglo xvii, sino mucho tiempo antes». Según una tradición que se remonta a los tiempos de Aristóteles (y que se mantuvo en las discusiones entre los filósofos naturales y teólogos de la edad media), la cantidad y la cualidad eran dos categorías diferentes. La cantidad se concebía como una entidad constituida por partes homogéneas (un volumen, por ejemplo, puede concebirse como la agregación de volúmenes más pequeños), mientras que una cualidad (como la blancura de una superficie o el calor de un cuerpo) tiene otro carácter.

Como acertadamente escribe **Alister Cameron Crombie** (1915-1996), [7, p. 85], en su *Historia de la Ciencia* publicada en 1959, «Uno de los cambios más importantes que facilitó el empleo creciente de la Matemática en la Física fue el introducido por la teoría de que todas las diferencias reales podían ser reducidas a diferencias en la categoría de la cantidad [. . .] Este cambio es el que distinguió principalmente la física matemática del siglo xvii de la física cualitativa de Aristóteles. Fue comenzado por los escolásticos de la última parte de la edad media».

A. C. Crombie
Fuente: researchgate.net

Miniatura de Nicolás Oresme en *Traité de l'espere*, Biblioteca Nacional, París, Francia, fondos franceses 565, fol. 1r. https://www.nicole-oresme.com/

Pero, ¿quién fue Oresme? **Nicolás Oresme** (1325–1382) nació cerca de Caen, en Normandía. Entró en el Colegio de Navarra en 1348 para estudiar Teología, lo cual implica que era ya maestro en Artes; en la lista del 29 de noviembre de 1348 aparece, en el Colegio de Navarra, como maestro de la nación normanda. Debió obtener el doctorado en Teología como máximo en 1356, puesto que era un requisito para ser Gran Maestre del Colegio de Navarra, cargo que ocupó desde el 4 de octubre de 1356. En esa época debió redactar muchos de sus tratados latinos, que atrajeron la atención de la familia real, con la que desde entonces estuvo estrechamente relacionado. Hubo de abandonar su designación como archidiácono de Bayeux en 1361, porque el Parlamento de París dictaminó que ese cargo no era compatible con su calidad de Gran Maestre del Colegio de Navarra. Fue nombrado canónigo de Rouen el 23 de noviembre de 1362, aunque parece que continuó enseñando en la Universidad de París. El 18 de marzo de 1364 fue decano del Capítulo catedral de Rouen. Desde 1369 hasta 1377 compuso sus comentarios a la Etica, la Política y el De Caelo de Aristóteles; además de su interés filosófico y científico, se trataba de traducciones al francés, las primeras versiones completas de obras de Aristóteles en una lengua moderna, realizadas por encargo del rey Carlos V. El 3 de agosto de 1377, por iniciativa del rey, fue nombrado obispo de Lisieux, cargo que mantuvo hasta que murió el 11 de julio de 1382. Para más detalles, el lector interesado puede consultar [31] y [2].

Oresme profundizó, como no se había hecho hasta entonces, en la representación de las intensidades de una cualidad. En su *Tractatus de configuratione potentiarum et mensurarum difformitattum* generaliza la idea de representar una cualidad puntual por medio de un segmento, a la de representar una cualidad lineal por medio de una superficie, o una cualidad superficial por medio de un volumen, [39].

Como se indica en [43], en la época de Oresme todavía no se utilizaba en matemáticas el lenguaje de las funciones, por lo que resulta impresionante que Oresme pudiera imaginar el concepto de curvatura antes de que el concepto de función fuese establecido. Tuvo que inventar y expresar sus pensamientos sin poder utilizar conceptos matemáticos necesarios, lo que convierten sus explicaciones sobre la curvatura en realmente únicas.

En la primera parte (los primeros cuarenta capítulos) de su obra *De configurationibus*, [35], Oresme presenta las bases de la doctrina de configuraciones, y a continuación aplica la doctrina a las cualidades, centrándose en las «entidades» que son permanentes o duraderas en el tiempo. Mientras discute estos elementos, sugiere que su teoría podría explicar numerosos fenómenos físicos y psicológicos. En la segunda parte de *De configurationibus* (los siguientes cuarenta capítulos), Oresme describe cómo la representación gráfica puede ser aplicada a «entidades que son sucesivas», lo que le lleva a aplicar la doctrina de las «figuraciones» al movimiento. Concluye esta parte con varios ejemplos que pueden ser extendidos a los efectos psicológicos, incluyendo las percepciones que son descritas como mágicas.

Para describir completamente su teoría, Oresme comienza su *De configurationibus* en I.i con la siguiente aclaración: «Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis continue» (es decir, «Toda magnitud medible excepto los números puede imaginarse como una cantidad continua»). Luego sigue una discusión de la latitud y longitud de las cualidades, seguida de la presentación de sus cantidades, e introduce en I.v su argumento de que las cualidades pueden ser «figuradas» (en lenguaje actual diríamos representadas gráficamente). Durante varios capítulos discute la idoneidad de las figuras y la forma de varios casos particulares. Esta discusión sugiere un análisis de curvas en posición general, si nos referirnos al concepto moderno. Una distinción importante aparece en el capítulo I.xi, donde Oresme examina las diferencias entre las cualidades *uniforme* y *diforme*; las primeras las imagina como un rectángulo y las segundas como un triángulo rectángulo. Continúa en I.xiv con una discusión sobre la «diformidad diforme simple» («simplici difformitate difformi»), que puede ser de dos tipos: simple y compuesta. En este capítulo Oresme usa *linea curva* para una curva, y *curvitas* para expresar su curvatura. En I.xv comienza describiendo cuatro tipos de diformidad diforme simple, que se explican mediante el dibujo de gráficos. No cabe duda de que es una primera aproximación a las cantidades variables y su representación gráfica. Después de esta extensa discusión, realizada sin ayuda de notación algebraica, Oresme introduce en los capítulos I.xix, I.xx y I.xxi la curvatura.

La curvatura es, sin duda, un caso particular en su doctrina de las cualidades, que posee «como otras cualidades, extensión e intensidad, y una clase [de curvatura] es uniforme mientras que otra es diforme». Y sigue diciendo Oresme, [35, p. 215]: «No sabemos con qué, o con respecto a qué, se mide la intensidad de la curvatura. Por ahora me parece que sólo hay dos [posibles] maneras [de hablar de la medida de la curvatura]. La primera es que el aumento de la curvatura es una función de su desviación de la rectitud, es decir, de su distancia de la rectitud. Esto es [a ser medido] por la cantidad del ángulo constituido por una recta y una curva, por ejemplo, un ángulo de contingencia o quizás otro ángulo también construido a partir de una recta y una curva». En sus propias palabras:

> «[. . .] ignotum enim est penes quid vel circa quid attenditur intensio curvitatis. Et pro nunc non apparet mihi nisi alter duorum modorum: unus est quod maioritas curvitatis attenditur penes recessum ipsius a rectitudine et distantiam ab ipsa rectitudine, que est secundum quantitatem anguli constituti ex recta et curva sicut est angulus contingentie aut forsan unus alter etiam constitutus ex recta et curva.»

Esta descripción tan intuitiva es muy consistente con el estudio moderno de la curvatura con signo y su relación con el ángulo de rotación con respecto a la longitud de arco. Pero Oresme va más allá, y escribe específicamente que la curvatura de una circunferencia es el inverso de su radio (en el capítulo I.xxi cuando cita la obra *Sobre superficies curvadas* de **Aristóteles**):

> «Ergo curvitas duple circumferentie est duplo extensior quam curvitas circumferentie subduple et per positum eadem curvitas duple circumferentie est duplo remissior. Igitur simpliciter loquendo curvitas duple circumferentie et curvitas subduple circumferentie sunt equales, et sic de aliis.»

Su estudio sobre la curvatura no se limita a las circunferencias, sino que se extiende a curvas más generales. Sin embargo, Oresme no proporciona un procedimiento para calcular la curvatura de una curva general.

C. Huygens
Fuente: Wikimedia Commons

Las circunstancias concretas de la época (en particular, las numerosas guerras que se desarrollaron en Europa, como la Guerra de los Cien Años) limitaron la diseminación de las ideas de Oresme e hizo que éstas permanecieran ocultas. Autores posteriores, como **Christiaan Huygens** (1629–1695) e **Isaac Newton** (1643–1727), descubrieron y desarrollaron de modo independiente conceptos fundamentales, sin apoyarse en los estudios de Oresme. A partir del siglo XVII los textos de Oresme fueron percibidos como pertenecientes a un paradigma diferente (filosófico o religioso). Sin embargo, con los ojos actuales no podemos imaginar que *De configurationibus* es un texto medieval oscuro que puede ser descrito como «ciencia religiosa». Por el contrario, debe ser considerado como la primera aproximación seria al concepto de curvatura y un avance de las matemáticas que se desarrollarían en los siglos venideros.

Curvatura de una curva plana

Tuvieron que pasar cerca de tres siglos antes de encontrar nuevas aportaciones al tema de la curvatura con el trabajo *Mysterium Cosmographicum* de **Johannes Kepler** (1571–1630), [23]. Kepler sugiere vagamente cómo definir la curvatura en un punto de una curva en general, considerando la circunferencia más próxima a la curva en ese punto (circunferencia que posteriormente Leibniz llamó *circunferencia osculatriz*). Como señala Coolidge en [6, p. 377], «actualmente vemos que fue ciertamente un error asociar a Leibniz con la invención de la circunferencia de curvatura, pero podemos hacernos una idea de que la adscripción correcta no era un problema demasiado sencillo».

Sin embargo, fue Huygens el primero que encontró un método para calcular la curvatura de una curva general, y Newton el que presentó el concepto en su forma moderna.

R. Descartes
Fuente: Wikimedia Commons

El cálculo todavía no había sido inventado, por lo que Huygens se basó en las ideas de **René Descartes** (1596–1650) sobre la multiplicidad de las intersecciones, y en las ideas de **Pierre de Fermat** (1601–1665) sobre los infinitésimos. Descartes, en *La Géométrie* (un apéndice de su obra *Discours de la méthode* publicada en 1637), proporciona un método para dibujar las tangentes y normales a una curva, encontrando circunferencias cuyos centros están en el eje, cuyos dos puntos de intersección con la curva «se unen», y así la intersección da una raíz doble. Este cálculo algebraico de Descartes supone un precedente del cálculo de Newton y Leibniz. Huygens se dio cuenta, en torno a 1653, que para cualquier punto sobre una curva se pueden considerar dos normales «adyacentes» (o «consecutivas») y proporcionó un método semi-geométrico de calcular su punto de intersección. Este punto es, por supuesto, el centro de curvatura, y su distancia a la curva es el radio de curvatura, aunque Huygens no usó estos términos. **Frans van Schooten** (1615–1660) incluyó el método en los apéndices de la segunda edición de *La Geometría* de Descartes (1659), que es donde Newton lo aprendió. Más tarde, en la excepcional obra *Horologium Oscillatorum* publicada en 1673, Huygens dio nombre al lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva: su *evoluta*, y demostró cómo construir un péndulo perfecto, cuyo periodo no depende de su amplitud (v. figura 1). La construcción estaba basada en el hecho de que la evoluta de una cicloide es congruente con la propia curva.

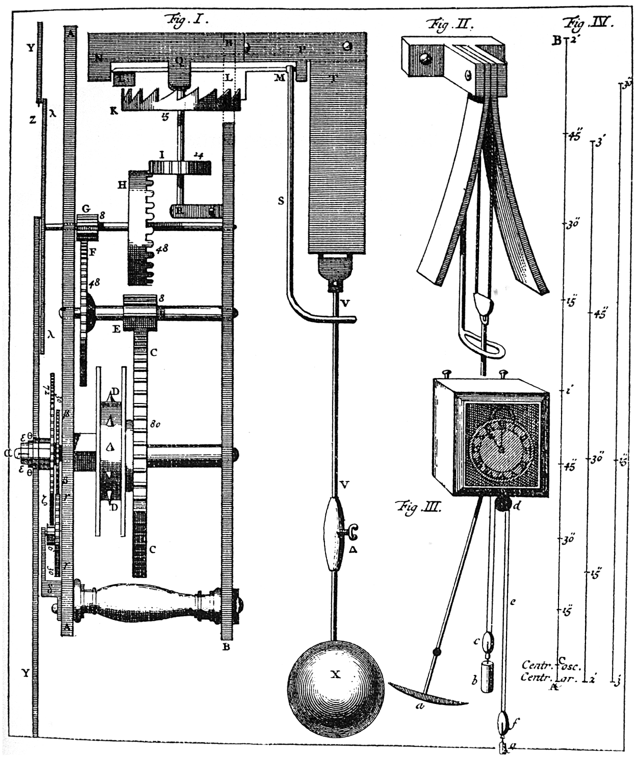


Figura 1: Péndulo perfecto de Huygens. Fuente: [24, p. 171]

El primer autor que manejó la cuestión de la curvatura de una curva plana en unos términos satisfactorios, desde el punto de vista actual, fue Newton. Este comenzó a pensar en el Cálculo alrededor de 1665, a partir de los trabajos de Huygens, pero no publicó nada al respecto hasta su carta a **John Collins** (1625–1683) en 1669, [6]; sus ideas se desarrollarían completamente en 1671 (aunque no se publicarían hasta 1736, [34]). La primera aproximación de Newton a la curvatura (que él llamó inicialmente *crookedness*, [4, p. 106]) descansó sobre la geometría de Descartes. Utilizó que dos normales cercanas (consecutivas) equivalen a tres puntos de intersección cercanos (consecutivos) con la circunferencia de curvatura, y usó los métodos de Descartes, con las mejoras introducidas en la segunda edición de su *Géométrie*, para encontrar el centro de curvatura como una raíz triple. Posteriormente, en su *Method of fluxions and infinite series*, [34], transformó esta visión algebraica en una versión más acorde con la visión actual.


D. J. Struik, sobre 1951
Fuente: MIT Museum

Resulta curioso comprobar que algunos textos actuales de geometría diferencial, como el muy conocido *Lectures on classical differential deometry* de **Dirk Jan Struik** (1894–2000), [47], todavía utilizan el lenguaje de puntos consecutivos cuando definen algunos conceptos geométricos (por ejemplo, *tangente* en p. 7, *plano osculador* en p. 12 o *curvatura* en p. 14). Como señala el propio Struik [47, p. 7], «este modo de expresión parece insatisfactorio, pero tiene un considerable valor heurístico y puede todavía hacerse bastante riguroso».

A finales del siglo XVII, el mundo ya estaba preparado para entender el concepto de curvatura. Un intento serio de definir matemáticamente la curvatura de una curva plana aparece en 1686, en la obra *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* [28] del alemán **Gottfried Leibniz** (1646–1716), uno de los coinventores del cálculo. Pero fue realmente el matemático suizo **Leonhard Euler** (1707–1783) quien inició, como dijimos anteriormente, el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas, introduciendo en [13] los conceptos de *longitud* y *curvatura*. A continuación presentaremos los enfoques de Leibniz y Euler para introducir la curvatura de una curva plana, y para ello seguiremos la excelente memoria *El significado geométrico de la curvatura*, [1, pp. 21–25], de nuestro compañero Luis J. Alías.

La idea intuitiva de Leibniz para introducir el concepto de curvatura de una curva está basada precisamente en el comportamiento de la curvatura de una circunferencia frente a su radio, en un intento por buscar una definición de curvatura que refleje tal comportamiento, [28]. Su aproximación hace uso de la llamada *circunferencia osculatriz* de una curva en un punto (del latín *osculari*, besar), que es, como hemos visto, la circunferencia que «mejor se adapta» a la curva en dicho punto (es decir, la circunferencia *que besa* a la curva en dicho punto).

Para describir brevemente el enfoque de Leibniz, consideremos que partimos de una *curva plana*, es decir, una curva contenida en un plano del espacio. Así mismo, consideremos que dicha curva es lo suficientemente suave como para que en cada punto de ella podamos construir la recta tangente a la curva, es decir, la recta que corta tangencialmente a la curva en dicho punto (es lo que matemáticamente se dice una *curva diferenciable*). La recta tangente es la recta que mejor se aproxima a nuestra curva cerca del punto.

Por geometría elemental, sabemos que por tres puntos no alineados del plano pasa una única circunferencia[2]. Por tanto, tres puntos P, Q

[2]Este resultado ya aparece en los *Elementos de Euclides*, concretamente en la proposición 3 del libro IV, donde se muestra cómo construir la circunferencia circunscrita a un triángulo cualquiera, [11, p. 112]. En el siglo XIX, **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) probaría en sus *Elementos de Geometría*, [29], que este resultado es equivalente al quinto postulado de las paralelas. Los Elementos de Legendre eran un libro de texto con contenido adicional para el que quisiera profundizar. Al finalizar cada capítulo, en notas o apéndices, o al finalizar el texto base (según las ediciones), Legendre incluía los últimos avances sobre los temas tratados. Sin duda alguna, la *Note II* fue de las más polémicas e interesantes, ya que en ella Legendre proponía en cada edición, desde la primera en 1794 hasta la duodécima en 1823, una demostración

y R no alineados de una curva plana determinan una circunferencia (v. figura 2).

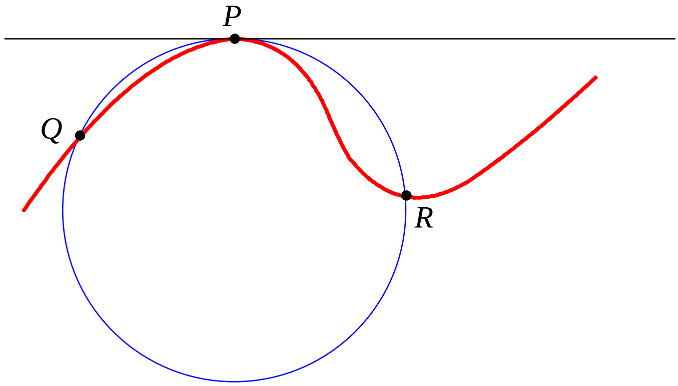


Figura 2: Tres puntos no alineados de una curva plana determinan una circunferencia.

Si fijamos el punto P de la curva y hacemos que los puntos Q y R se aproximen cada vez más al punto P, entonces las circunferencias determinadas por estos tres puntos *convergen* a una circunferencia tangente a la curva en P, que se denomina la *circunferencia osculatriz* de la curva en el punto P (v. figura 3).

Entonces la curvatura de la curva en el punto P se define como el inverso del radio de su circunferencia osculatriz:

$$\kappa(P) = \frac{1}{r(P)},$$

(que posteriormente se comprobaba errónea) del quinto postulado de Euclides. Como se indica en [15], los *Elementos de Geometría* de Legendre estaba destinado a los estudiantes de Bachillerato y el texto era un regreso «al rigor de los Elementos de Euclides, pero con una cuidada presentación para facilitar la comprensión de las ideas clásicas de Euclides a los estudiantes de su época». Para finalizar esta extensa nota, otro de los resultados que resulta ser equivalente al quinto postulado de Euclides es que la suma de tres los ángulos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos, resultado que Legendre demuestra (aparentemente sin usar el quinto postulado) y que utiliza erróneamente para probar el quinto postulado, [29, Proposition XIX, p. 20].

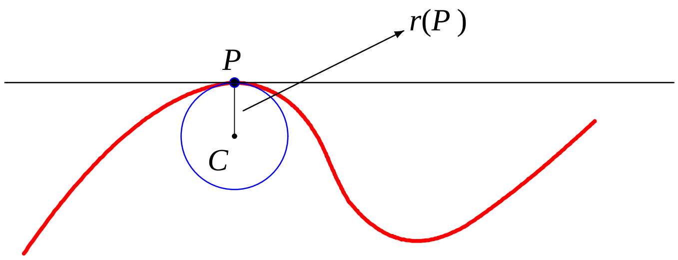


Figura 3: Circunferencia osculatriz.

siendo $r(P)$ el radio de la circunferencia osculatriz en el punto P. Este radio se denomina precisamente el *radio de curvatura* de la curva en P.

Pasemos, a continuación, a exponer brevemente la aproximación de Euler al concepto de curvatura. Para ello, consideremos de nuevo una curva plana con recta tangente en cada uno de sus puntos. Consideremos, así mismo, una recta exterior fija, que será nuestra *recta de referencia*.

Euler introduce la curvatura de una curva en un punto de ella como la *velocidad de variación* del ángulo que forma la recta tangente a la curva en dicho punto con la recta de referencia; es, por tanto, una medida de la *falta de rectitud* de la curva. Precisemos estas ideas un poco más. Para cada punto P de la curva, consideremos $\theta(P)$ el ángulo que forma la recta tangente a la curva en P con la recta de referencia (v. figura 4).

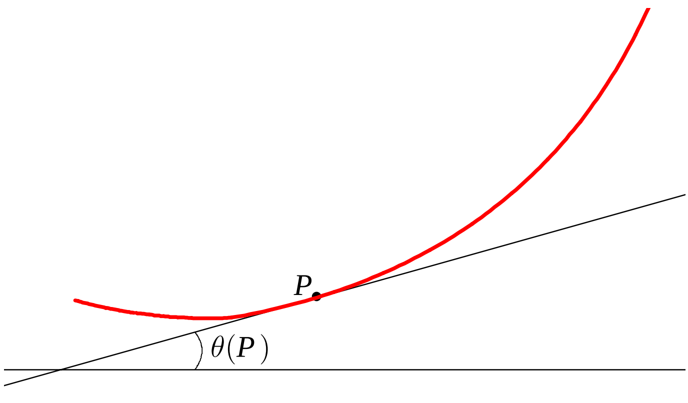


Figura 4: Ángulo de la recta tangente a la curva con la recta de referencia.

Dados dos puntos P y Q de la curva, si representamos por $\Delta\theta(P,Q)$ la diferencia entre ambos ángulos (v. figura 5),

$$\Delta\theta(P,Q) = \theta(Q) - \theta(P),$$

entonces la curvatura de la curva en P viene dada por

$$\kappa(P) = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta(P,Q)}{\ell(P,Q)} = \lim_{Q\to P} \frac{\theta(Q)-\theta(P)}{\ell(P,Q)} = \lim_{Q\to P} \frac{\theta(Q)-\theta(P)}{d(P,Q)},$$

donde $d(P,Q)$ es la distancia euclídea entre los puntos P y Q, y $\ell(P,Q)$ mide la longitud de la curva entre esos mismos puntos, es decir, la distancia entre P y Q a lo largo de la curva. Es fácil reconocer en esta expresión la derivada (o velocidad de variación) del ángulo θ.

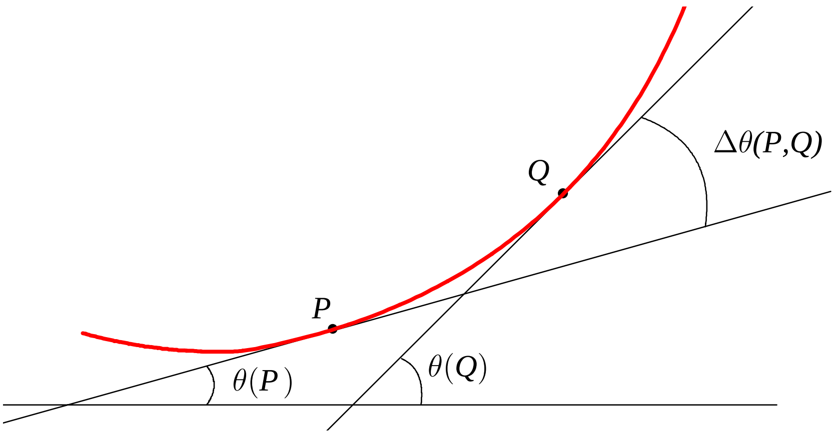


Figura 5: Diferencia entre los ángulos que forman dos rectas tangentes con una recta de referencia.

No es difícil ver que esta otra definición de curvatura coincide con la anterior. De hecho, con esta definición es muy fácil comprobar que una línea recta tiene curvatura cero en todos sus puntos, mientras que una circunferencia de radio r tiene la misma curvatura en todos sus puntos, y viene dada por el inverso de su radio.

Curvatura de una curva espacial

A. C. Clairaut
Fuente: Wikimedia Commons

Durante muchos años, los avances en el tema que estamos tratando eran producidos por dos hombres, dos verdaderos genios: Euler, de quien ya hemos hablado, y Clairaut. **Alexis Claude Clairaut** (1713–1765), siendo todavía un adolescente con 16 años, escribió su obra *Recherches sur les courbes à double courbure*, [5], que le permitió ingresar, con solo 18 años, en la Academia de Ciencias de París. El libro está dedicado principalmente a la geometría analítica del espacio, un tema nuevo en esos días. Y las curvas espaciales se veían como intersección de superficies, no como entidades independientes. Los ejemplos de Clairaut son curvas algebraicas, como la intersección de los paraboloides $y^2 = ax$ y $z^2 = by$, o la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$; en ocasiones considera alguna curva trascendental, como la cicloide.

Es importante detenernos en el título del libro, pues «courbes à double courbure» terminaría convirtiéndose en un término técnico, con significado geométrico. Clairaut tomó prestado el nombre de **Henri Pitot** (1695–1771), un famoso ingeniero hidráulico de la época, que lo había usado en un artículo de 1724 que trataba sobre las hélices, [37]. Ni Pitot ni Clairaut, sin embargo, tenían ninguna intención, al utilizar ese nombre, de referirse a la primera o segunda curvatura. En palabras del propio Clairaut, en la segunda página del Prefacio de [5] se dice:

> «J'ai crû devoir appeller ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parce qu'en les considérant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes, et c'est même le nom qu'on leur donne dans un mémoire de l'Academie Royale des Sciences où on les propose comme un objet digne des recherches des géomètres».

Ciertamente, las palabras de Clairaut recogen la intuición que todos tenemos cuando examinamos una curva en el espacio. A diferencia de una curva en el plano (en la que podemos percibir si está curvada o no, sin entrar en cuantificar el tamaño de esa curvatura), en una curva en el espacio podemos reconocer que hay curvas que se curvan de diferente manera, como si hubiera varias categorías o clases de curvatura. Por ejemplo, si enrollamos un alambre alrededor de un tubo, podemos crear un anillo (una circunferencia) o un muelle (una hélice), y todos estaremos de acuerdo en que la hélice parece curvarse de varias maneras.

M. A. Lancret
Fuente: Wikimedia Commons

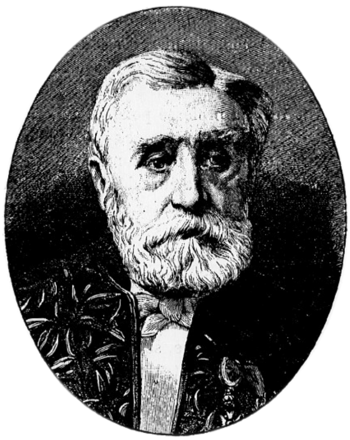
La formalización de esta cualidad de torcimiento hubo de esperar algunos años, hasta la llegada de **Michel Ange Lancret** (1774–1807). Lancret era un joven prometedor, pero murió demasiado pronto para ver cumplidos sus objetivos. Formó parte, junto con Monge, Fourier, Ampère y muchos otros, del grupo de científicos que acompañó a Napoleón en su expedición a Egipto. Posteriormente, también formó parte de la comisión creada para publicar los resultados de las investigaciones, pero murió joven a la edad de 33 años. Lancret escribió dos trabajos matemáticos, [25] y [26], el primero sobre la teoría general de las curvas espaciales, y el segundo (publicado tras su muerte), sobre «développoides», curvas espaciales cuyas tangentes son líneas que cortan a otra curva espacial dada bajo un ángulo constante diferente de 90º. Su primer trabajo es de una naturaleza más general, y contiene dos cantidades (parámetros) fundamentales en una curva espacial, que él llamó «première flexion» y «seconde flexion». Usando la terminología actual, el primero es el ángulo $d\mu$ entre dos planos normales consecutivos, y el segundo es el ángulo $d\nu$ entre dos planos osculadores consecutivos. La curvatura y la torsión aparecen como diferenciales, y así sería hasta Cauchy, cuando son escritas como funciones (cantidades finitas). Queda una tercera diferencial, el ángulo $d\omega$ entre dos planos rectificantes, que se relaciona con los anteriores por la ecuación de Lancret:

$$d\mu^2 + d\nu^2 = d\omega^2,$$

lo que demuestra que solo dos de las tres cantidades son independientes.

Como señala Struik en su magnífico artículo *Outline of a history of differential geometry*, [46], Lancret es el primero en desarrollar una teoría sistemática de las curvas espaciales después de Euler y, según parece, de un modo independiente. La formalización definitiva sería obra de los trabajos posteriores de Cauchy, Frenet y Serret.

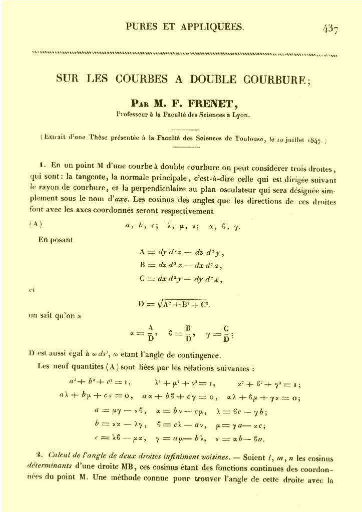
La teoría general de las curvas espaciales carece de la elegancia y fácil acceso de la teoría de curvas planas, y su desarrollo se prolonga a lo largo de mucho tiempo de una manera un tanto dispersa, [46]. **A. J. C. Barré de Saint Venant** (1797–1886), bien conocido por sus contribuciones a la teoría de la elasticidad, publicó en 1846 un artículo que proporcionaba un gran salto hacia la completación de la teoría elemental de las curvas espaciales, [42]. En este trabajo, De Saint Venant recoge el material disponible hasta entonces, añade nuevos teoremas, in-



A. J. C. B. de Saint Venant
Fuente: Wikimedia Commons

troduce el término «binormal», y proporciona una interesante revisión histórica, concluyendo con varias páginas de fórmulas y ecuaciones.

Esta aproximación sería abandonada cuando **Jean Frédéric Frenet** (1816–1900), en su tesis doctoral *Sur les courbes à double courbure* defendida en Toulouse en 1847, encontró la clave para un control fácil de los cálculos en este campo, [14]. Sus «fórmulas de Frenet» son, como acertadamente señala Struik en [46], el resultado de la creencia de que no sólo debemos encontrar las derivadas con respecto al arco de los cosenos directores de la tangente, sino también los relativos a la normal principal (plano rectificante) y la binormal (plano osculador).



PURES ET APPLIQUÉES. 437

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. F. FRENET,

Professeur à la Faculté des Sciences à Lyon.

(Extrait d'une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, le 10 juillet 1847.)

1. En un point M d'une courbe à double courbure on peut considérer trois droites, qui sont : la tangente, la normale principale, c'est-à-dire celle qui est dirigée suivant le rayon de courbure, et la perpendiculaire au plan osculateur qui sera désignée simplement sous le nom d'*axe*. Les cosinus des angles que les directions de ces droites font avec les axes coordonnés seront respectivement

$$(A) \qquad a,\ b,\ c;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

En posant

$$A = dy\, d^2z - dz\, d^2y,$$
$$B = dz\, d^2x - dx\, d^2z,$$
$$C = dx\, d^2y - dy\, d^2x,$$

et

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

on sait qu'on a

$$\alpha = \frac{A}{D},\quad \beta = \frac{B}{D},\quad \gamma = \frac{C}{D};$$

D est aussi égal à $\omega\, ds^2$, ω étant l'angle de contingence.

Les neuf quantités (A) sont liées par les relations suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$
$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,\quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,\quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0;$$
$$a = \mu\gamma - \nu\beta,\quad \alpha = b\nu - c\mu,\quad \lambda = \beta c - \gamma b;$$
$$b = \nu\alpha - \lambda\gamma,\quad \beta = c\lambda - a\nu,\quad \mu = \gamma a - \alpha c;$$
$$c = \lambda\beta - \mu\alpha,\quad \gamma = a\mu - b\lambda,\quad \nu = \alpha b - \beta a.$$

2. *Calcul de l'angle de deux droites infiniment voisines.* — Soient l, m, n les cosinus *déterminants* d'une droite MB, ces cosinus étant des fonctions continues des coordonnées du point M. Une méthode connue pour trouver l'angle de cette droite avec la

Unos años después, **Joseph Alfred Serret** (1819–1885), desconocedor del trabajo de Frenet, llegó a las mismas fórmulas, [44]; esto obligó a Frenet a publicar de nuevo una parte de su trabajo en la misma revista. Cuando J. A. Serret publica su trabajo en 1851 es consciente de la dificultad existente para que sus fórmulas sean aceptadas rápidamente por la comunidad matemática. Quizás por ello incluye en su artículo una demostración alternativa, y más sencilla, de dos resultados conocidos y recientemente demostrados. En sus propias palabras:

J. A. Serret
Fuente: Wikimedia Commons

> «Des formules qui précèdent, découlent immédiatement deux théorèmes remarquables. Le premier de ces théorèmes, qu'on établit facilement par des considérations géo-

métriques, a été démontré analytiquement par M. Puiseux (*voir* le tome VI de ce Journal). Il consiste en ce que *l'hélice ordinaire est la seule courbe dont les deux courbures sont constantes*. Le second théorème est dû à M. Bertrand, qui l'a démontré géométriquement; il consiste en ce que *les courbes dont les deux courbures ont un rapport constant sont des hélices tracées sur un cylindre à base quelconque*.»

El primer resultado es bien conocido y caracteriza a la hélice circular ordinaria como la única curva espacial (es decir, que no está contenida en un plano) que tiene la curvatura y la torsión constantes. El segundo resultado que demuestra Serret se conoce actualmente como *teorema de Lancret*, pues fue enunciado en 1802 por Michel Ange Lancret, aunque no lo demostró. La primera demostración de la que se tiene constancia se debe a A. J. C. Barré de Saint Venant, que la demostró en 1844, aunque apareció publicada dos años más tarde, en 1846, [42]. Este resultado afirma que las curvas tales que la razón entre la torsión y la curvatura es constante son las hélices trazadas sobre un cilindro generalizado.


F. Joachimsthal
Fuente: MacTutor archive

Sin embargo, la importancia de las fórmulas de Frenet-Serret no fue reconocida de inmediato. Por ejemplo, el clásico libro de texto del matemático alemán **Ferdinand Joachimsthal** (1818–1861) sobre geometría diferencial, [22], que es el resultado de las clases impartidas en la Universidad de Breslavia (no confundir con Bratislava) durante el curso 1856–1857, no las recoge, ni siquiera la edición de 1890 editada por Leopold Natani. Tampoco aparecen las fórmulas en un libro sobre curvas espaciales escrito en 1860 por otro Serret, **Paul Serret** (1827–1898), que proporciona una interesante exposición de toda la teoría conocida hasta 1860, con especial énfasis en las curvas esféricas, [45].

Curvatura de una superficie

Una *superficie* es un objeto geométrico de naturaleza bidimensional: vista de cerca es como un trozo de plano, aunque a cierta distancia puede adquirir formas extraordinarias. Análogamente al caso de las curvas que hemos tratado en las secciones anteriores, las superficies que vamos a estudiar aquí son lo suficientemente suaves como para que en cada punto de ellas podamos considerar el plano tangente a la superficie en dicho punto. Estos objetos son lo que los matemáticos llamamos *superficies diferenciables*, e intuitivamente son las superficies que no tienen picos ni aristas (v. figura 6).

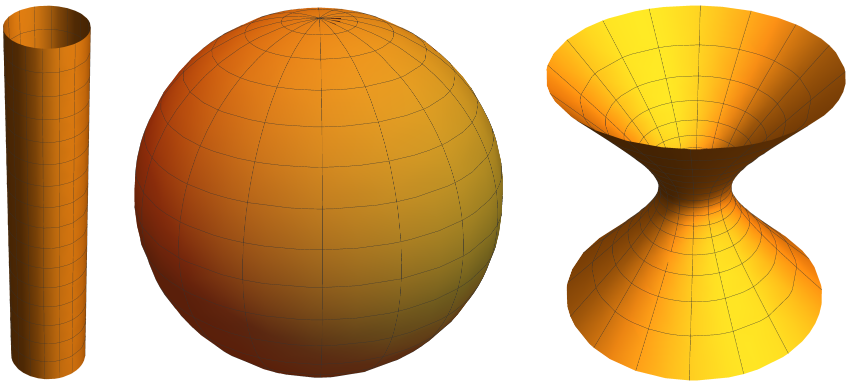


Figura 6: Algunos ejemplos de superficies diferenciables: cilindro, esfera e hiperboloide.

El plano tangente a una superficie en un punto es el plano que la roza tangencialmente en dicho punto y es el que mejor se aproxima a la superficie cerca de ese punto (de entre todos los planos que pasan por ese punto). Entonces, en cada punto de una superficie, podemos distinguir dos tipos de direcciones: las direcciones tangentes y la dirección normal (o perpendicular) a la superficie en dicho punto.

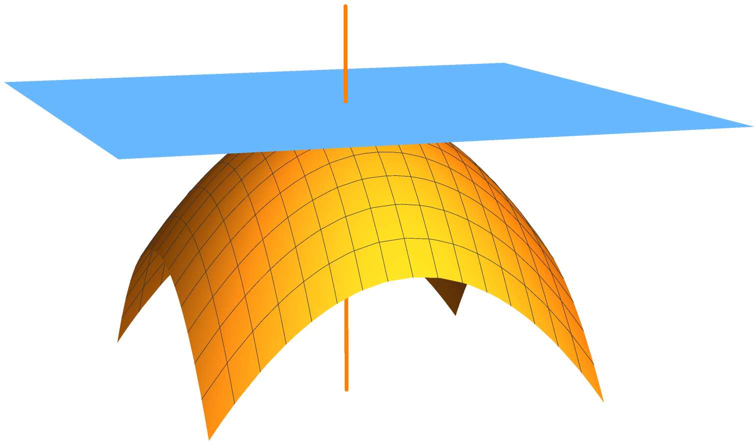


Figura 7: El plano tangente (azul) y dirección normal (naranja) a una superficie diferenciable.

Las direcciones tangentes a la superficie en un punto P de la misma son aquellas direcciones que poseen las curvas (ya sean planas o espaciales) contenidas en la propia superficie y que pasan por el punto. El conjunto formado por todas estas direcciones constituyen precisamente el plano tangente a la superficie en dicho punto (v. figura 7). Por otro lado, la dirección normal en el punto P es la dirección perpendicular a dicho plano (v. figura 7). Es precisamente el hecho de que en cada punto de una superficie podamos considerar su plano tangente, con sus correspondientes direcciones tangentes, y su dirección normal, la principal clave para introducir el concepto de curvatura de una superficie.

Curvaturas seccionales (o normales)

Leonhard Euler (1707–1783) es quizás el matemático más prolífico de toda la historia, habiendo publicado más de 500 libros y artículos durante su vida, sin contar los que aparecieron tras su muerte, [24]. Trabajó en todas las áreas, aunque sus campos principales fueron el análisis, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones y, por supuesto, la geometría diferencial. Si hay un artículo del que pueda decirse que inauguró la geometría diferencial, éste es el trabajo de Euler *Recherches sur la courbure des surfaces*, [13], presentado a la Academia de Ciencias de Berlín en 1760 y publicado en 1767.

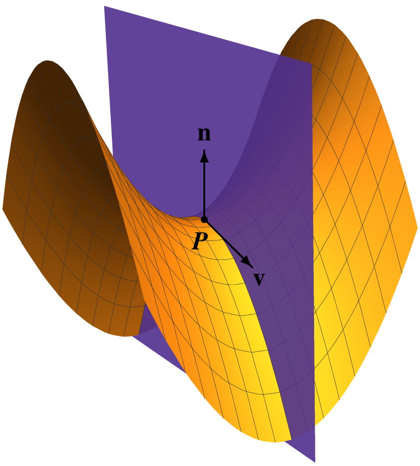
Como hemos visto, la idea de curvatura estaba bien establecida sobre 1760 como una herramienta para estudiar las curvas, pero no estaba nada claro cómo extender la herramienta a objetos de dimensiones superiores, a las superficies. El propio Euler lo señala en [13, p. 119]:

> «Para conocer la curvatura de las líneas curvas, la determinación del radio osculador proporciona la más justa medida, pues para cada punto de la curva nos proporciona una circunferencia cuya curvatura es la misma. Pero cuando uno pregunta por la curvatura de una superficie, la cuestión es muy equívoca y en absoluto susceptible de una respuesta definitiva, como en el caso precedente.»

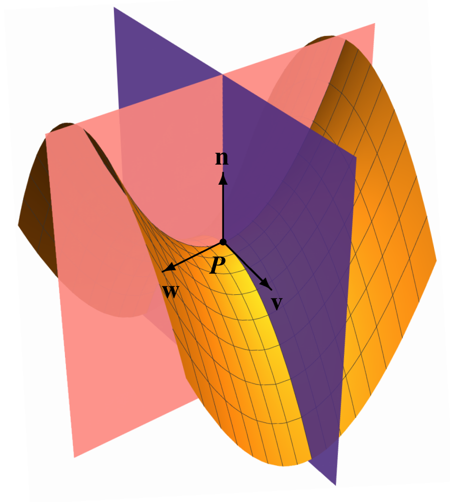
Abordando la cuestión del mismo modo que se había hecho históricamente en el caso de las curvas, estaba claro que un plano es una superficie que no se curva en ningún punto, mientras que otras superficies, como la esfera, el cilindro o el hiperboloide (v. figura 6), son ciertamente superficies que vemos *curvadas* y, por tanto, sería necesario establecer un mecanismo para cuantificar esa curvatura. Y este fue precisamente el problema que Euler abordó en dicho trabajo.

La idea básica, y en cierto modo también genial, de Euler fue reducir el estudio de la curvatura de una superficie en un punto P al estudio de la curvatura en dicho punto de las curvas planas que se obtienen al cortar la superficie por planos que pasan por el punto P. Un primer avance de Euler fue darse cuenta que era suficiente con estudiar las secciones planas normales, es decir, las intersecciones de la superficie con los planos perpendiculares a la superficie (los planos que contienen a la recta normal). A continuación vamos a explicar con más detalle el razonamiento de Euler.

Escojamos una dirección $\mathbf{v}$ tangente a la superficie en el punto P y consideremos $\Pi_{\mathbf{v}}$ el plano que pasa por P, es perpendicular a la superficie en P y contiene a la dirección tangente $\mathbf{v}$ (en otras palabras, $\Pi_{\mathbf{v}}$ es el plano que pasa por P y está generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$, el vector normal). El plano $\Pi_{\mathbf{v}}$ corta a la superficie a lo largo de una curva plana que en el punto P tiene la dirección de $\mathbf{v}$. Esto es lo que llamamos la *sección normal* de la superficie determinada por la dirección $\mathbf{v}$ (v. figura 8 (a)).



(a)



(b)

Figura 8: (a) Sección normal de una superficie. (b) Haz de planos perpendiculares y secciones normales.

Si ahora escogemos otra dirección tangente distinta $\mathbf{w}$, el plano $\Pi_{\mathbf{w}}$ será diferente, así como la sección normal determinada por la nueva dirección tangente $\mathbf{w}$. De hecho, la familia de planos perpendiculares a la superficie en el punto P constituye un haz de planos que pasan por P y contienen a la dirección normal $\mathbf{n}$, y cada uno de los planos que forman este haz determina una sección normal diferente, aunque puedan ser congruentes (v. figura 8 (b)).

No obstante, existen casos extremos, como el caso en que la superficie de partida sea un plano o una esfera. En efecto, si la superficie de partida es un plano, entonces las secciones normales, independientemente del punto elegido y de la dirección tangente elegida, son siempre líneas rectas y, por lo tanto, todas ellas tienen curvatura cero; y si la superficie de partida es una esfera de radio r, entonces las secciones normales, independientemente del punto elegido y de la dirección tangente elegida, son siempre circunferencias (del mismo radio que la esfera) y, por lo tanto, todas ellas tienen curvatura $1/r$ (v. figura 9).

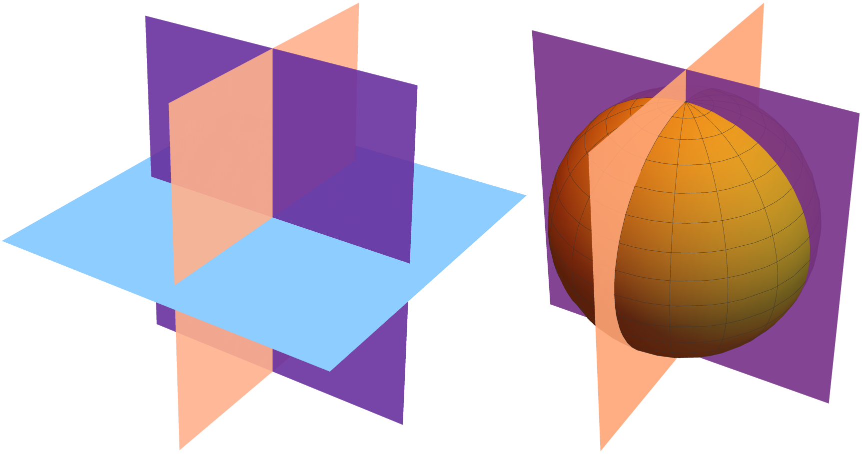


Figura 9: Secciones normales de un plano y de una esfera.

Sin embargo, lo que ocurre en el plano y en la esfera no es lo habitual, de hecho es algo excepcional. Lo común es que las secciones normales a la superficie varíen, tanto cuando cambiamos el punto P elegido como cuando, fijado el punto, cambiamos la dirección tangente elegida. De esta manera, fijado el punto P generamos una familia de curvas planas, las secciones normales, que dependen de la dirección tangente elegida $\mathbf{v}$. Esto nos permite definir la *curvatura normal* de la superficie en el punto P con respecto a la dirección tangente $\mathbf{v}$ como la curvatura de la correspondiente sección normal.

Curvaturas principales

En el mismo trabajo [13], Euler hace una contribución decisiva a la teoría de superficies, al darse cuenta que entre todas las secciones normales en el punto P hay una donde la curvatura normal alcanza su valor máximo, y en una inclinación de 90º con respecto a esta sección normal existe otra sección normal donde la curvatura normal es mínima.

Estas dos direcciones privilegiadas tangentes a la superficie en el punto P, que son perpendiculares entre sí, se llaman las *direcciones principales* de la superficie en el punto P, y los correspondientes valores de la curvatura normal en dichas direcciones son las *curvaturas principales* de la superficie en dicho punto:

$$\begin{aligned}\kappa_1(P) &= \text{valor máximo de la curvatura normal,}\\ \kappa_2(P) &= \text{valor mínimo de la curvatura normal.}\end{aligned}$$

Y también descubre Euler que si la dirección tangente $\mathbf{v}$ forma un ángulo α con la dirección principal correspondiente a κ_1, entonces la curvatura κ de la correspondiente sección normal está dada por

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Por tanto, el problema de determinar las curvaturas de las infinitas secciones normales se reduce a encontrar solo dos, su máximo y su mínimo, pues todas las demás se pueden calcular a partir de la inclinación del plano normal.

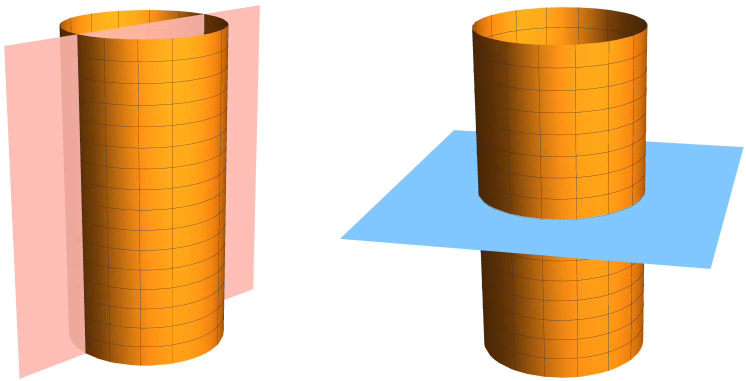
Aunque la fórmula anterior para la curvatura κ de una sección normal se encuentra implícitamente en el trabajo de Euler, esta formulación particular se debe a **Charles Dupin** (1784–1873), [8, p. 109]. Euler lo formuló del siguiente modo [13, p. 142]:

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi},$$

donde $r = 1/\kappa$, $g = 1/\kappa_1$, $f = 1/\kappa_2$ y $\varphi = 90 - \alpha$. Dupin, que fue estudiante de **Gaspard Monge** (1746-1818) en la prestigiosa *École Polytechnique*, publicó en 1813 sus descubrimientos, junto con varias aplicaciones de los trabajos de Euler, en su obra *Développements de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux dáblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc.*, [8].

En el caso del plano y de la esfera, los valores de las curvaturas principales coinciden, ya que, como hemos visto, la curvatura normal de un plano es siempre cero y la curvatura normal de una esfera de radio r es siempre $1/r$, independientemente de la dirección tangente elegida, por lo que en el plano se tiene $\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$, mientras que en la esfera es $\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 1/r$. En particular, cualquier dirección tangente en el plano o en la esfera es una dirección principal. Pero, como ya hemos dicho antes, esto es lo excepcional.

Por ejemplo, si la superficie considerada es un cilindro de radio r, entonces la dirección correspondiente a la de mínima curvatura es la dirección paralela al eje del cilindro, cuya sección normal es una recta y por tanto su curvatura normal es $\kappa_2(P) = 0$ (v. figura 10 (a)). Por su parte, la dirección correspondiente a la de máxima curvatura es la dirección de la circunferencia del cilindro, perpendicular a su eje, con curvatura normal dada por $\kappa_1(P) = 1/r$ (v. figura 10 (b)). Cualquier otra sección normal del cilindro es una elipse (v. figura 11), con curvatura entre 0 (el valor mínimo) y $1/r$ (el valor máximo).



(a) Recta (b) Circunferencia

Figura 10: Direcciones principales de un cilindro y las correspondientes secciones normales.

En general, se dice que un punto P de una superficie es un punto *umbílico* (o *umbilical*) cuando las dos curvaturas principales de la superficie en dicho punto coinciden:

$$\kappa_1(P) = \kappa_2(P).$$

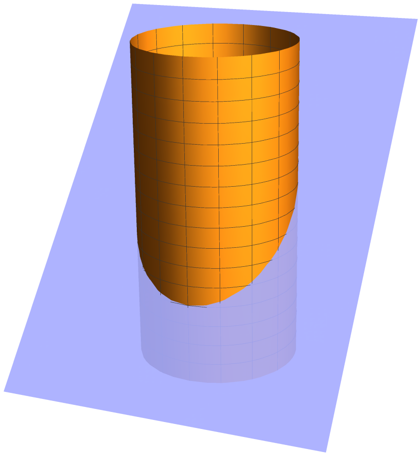


Figura 11: Sección normal de un cilindro.

Por lo tanto, en un punto umbílico la superficie se dobla igual en todas las direcciones tangentes, ya que la curvatura normal de la superficie en dicho punto es la misma en todas sus direcciones tangentes. Por ejemplo, como hemos visto anteriormente, todos los puntos de un plano son puntos umbílicos, con la misma curvatura normal cero. Del mismo modo, todos los puntos de un esfera de radio r son puntos umbílicos, con la misma curvatura normal $1/r$. Esta propiedad caracteriza a ambas superficies, en el sentido de que *las únicas superficies que tienen todos sus puntos umbílicos son los planos y las esferas*. Por su parte, el cilindro no tiene ningún punto umbílico.

Curvatura de Gauss y curvatura media

El 8 de octubre de 1827, **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855) presentó en la Sociedad Científica Real de Gotinga su ensayo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Investigaciones generales sobre superficies curvadas), el fruto de al menos 15 años de intenso trabajo intelectual, inspirado en parte por sus investigaciones sobre las geometrías no euclídeas, [16], [17]. Gauss, uno de los matemáticos más brillantes de toda la historia, publicó trabajos en álgebra, teoría de números, análisis complejo y, por supuesto, en geometría diferencial.

A diferencia de Euler, Gauss no considera las secciones normales de una superficie, sino que comienza su análisis estudiando los vectores normales a la superficie. Y se da cuenta de que «a cada punto de la superficie se le puede hacer corresponder un punto bien definido en la esfera», [17, p. 9]. Se construye así la imagen esférica de una superficie, que se describe matemáticamente a través de la llamada *aplicación de Gauss*, y que proporciona una medida de la variación de la dirección normal a lo largo de la superficie. De alguna manera, la imagen esférica de una superficie arbitraria es una porción de una esfera de radio unidad que es tanto más grande cuanto más se curva la superficie. En efecto, dado un punto P de una superficie, consideremos la dirección normal a la superficie en dicho punto. Esta dirección viene determinada por su *vector director* $N(P)$, que es un vector de longitud unidad en la dirección normal. Dicho vector $N(P)$, trasladado al origen, *puede pensarse* como un punto en la esfera de radio unidad. La aplicación de Gauss es entonces la aplicación que asocia a cada punto P de la superficie su correspondiente punto $N(P)$ en la esfera unidad (v. figura 12).

C. F. Gauss
Fuente: Wikimedia Commons

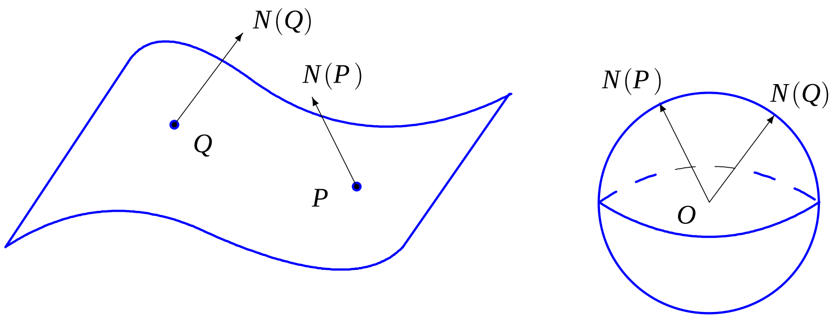


Figura 12: La aplicación de Gauss.

Intuitivamente, la forma de la superficie viene determinada por la manera en que el plano tangente a la superficie varía en cada punto o, equivalentemente, por la manera cómo varía su dirección normal. De ahí que el estudio de la aplicación de Gauss sea interesante. Por ejemplo, la imagen esférica de un plano se reduce a un punto de la esfera unidad, la de un cilindro es todo un ecuador de la esfera, y la de un esfera es toda la esfera unidad.

La manera en la que Gauss introdujo la curvatura de la superficie es la siguiente. Fijado un punto P de la superficie, consideremos un trocito de superficie $\mathcal{U}(P)$ que contenga al punto P en su interior y consideremos también el trocito de esfera unidad determinado por las direcciones normales en cada uno de los puntos de $\mathcal{U}(P)$, es decir, su correspondiente imagen esférica, $N(\mathcal{U}(P))$ (v. figura 13).

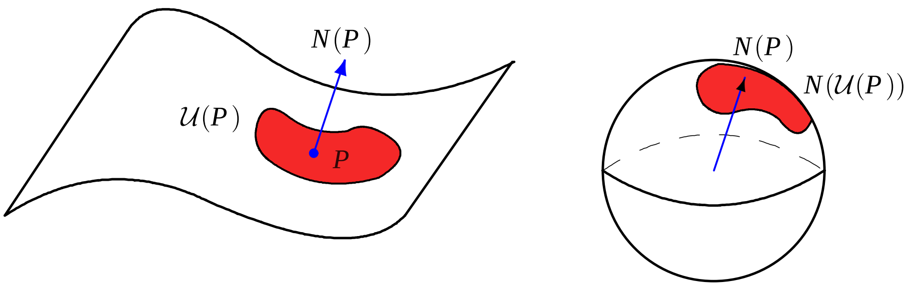


Figura 13: La imagen esférica por la aplicación de Gauss.

En esta situación, podemos considerar el área del trocito de superficie $\mathcal{U}(P)$ y el área de $N(\mathcal{U}(P))$, siendo esta última el área de un trocito de esfera unidad (área esférica). Gauss definió entonces la curvatura de la superficie en dicho punto como el *límite* del cociente entre ambas áreas, cuando el trocito de superficie considerado $\mathcal{U}(P)$ se va haciendo cada vez más pequeño alrededor del punto P, es decir,

$$\lim_{\mathcal{U}(P)\to P} \frac{\text{área esférica de } N(\mathcal{U}(P))}{\text{área de } \mathcal{U}(P)}.$$

Este cociente ya había sido estudiado con anterioridad por **Olinde Rodrigues** (1794–1851), [40], aunque este matemático no fue capaz de deducir los profundos resultados de Gauss. A la anterior medida de la curvatura se asigna un valor positivo o negativo dependiendo de si N aplica $\mathcal{U}(P)$ en una región «similar» de la esfera o en una región «opuesta» (inversa), respectivamente. Esto tiene que ver con la propiedad de que la aplicación N preserve o invierta la orientación.

En un teorema elegante, a la par que unificador, Gauss relaciona su medida de la curvatura con los resultados obtenidos previamente por Euler, [16, p. 17], [17, p. 15]:

> «La medida de la curvatura en cualquier punto de la superficie es igual a una fracción cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es el producto de los dos radios de curvatura extremos de las secciones normales.»

Teniendo en cuenta que los inversos de los radios de curvatura de las secciones normales son precisamente las curvaturas normales, el anterior resultado expresa que la curvatura de Gauss en un punto P, que denotaremos por $K(P)$, está dada por el producto de sus curvaturas principales, es decir,

$$K(P) = \frac{1}{R_1(P)R_2(P)} = \kappa_1(P) \cdot \kappa_2(P),$$

donde $R_1(P)$ y $R_2(P)$ denotan el menor y el mayor radio de curvatura, respectivamente, de las secciones normales.

Unos pocos años antes, en las memorias de 1821 y 1826, [18, 19], la matemática francesa **Sophie Germain** (1776–1831) había propuesto como una medida de la curvatura de una superficie la media aritmética de los inversos de los radios de curvatura extremos, una cantidad que se había mostrado crucial en sus estudios sobre elasticidad, [24, p. 198]. Germain introdujo la noción de *esfera referente* a una superficie en un punto P, definida como la superficie cuyo radio es el inverso de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1(P)} + \frac{1}{R_2(P)}\right).$$

En otras palabras, la curvatura introducida por Germain es lo que hoy se conoce con el nombre de *curvatura media* de la superficie en el punto P:

$$H(P) = \frac{\kappa_1(P) + \kappa_2(P)}{2}.$$

S. Germain
Fuente: Wikimedia Commons

A diferencia de Gauss, cuyas aportaciones fueron reconocidas por la comunidad matemática poniendo su nombre a la *curvatura de Gauss*, en el caso de Germain no ocurrió lo mismo con *su curvatura*. Merece la pena señalar que la propia Germain se mostró disconforme con esta situación. Después de leer el tratado de Gauss sobre las superficies curvadas, Germain escribió una carta a Gauss comparando su noción de curvatura con la de ella, y lamentando la ausencia de reconocimiento a su trabajo, [24, p. 199]:

> «En una charla con el Sr. Bader[3] sobre el tema actual de mi estudio, le di la oportunidad de hablar conmigo y, posteriormente, de mostrarme la memoria en la que usted compara la curvatura de las superficies con la de la esfera [. . .]
>
> No puedo decirle, Monsieur [Gauss], lo asombrada que quedé, y al mismo tiempo, lo satisfecha que me sentí al conocer que un matemático de renombre, casi simultáneamente, tuvo la idea de una analogía que me parece tan racional que no entendí cómo nadie había pensado en ello antes, ni que hasta la fecha nadie ha querido prestar atención a lo que ya he publicado a este respecto.»

Estas dos magnitudes, la curvatura de Gauss y la curvatura media, son las dos curvaturas fundamentales de una superficie y son radical-

[3]Un estudiante de Gauss que estaba visitando París en 1829.

mente distintas. En efecto, la curvatura media es una cantidad geométrica *extrínseca*, en el sentido de que su valor depende de cómo la superficie *está metida* en el espacio ambiente tridimensional. Dicho de otra forma, una misma superficie puede meterse en el espacio euclídeo de diferentes maneras y con distintos valores para su curvatura media. El hecho de que la curvatura media sea algo extrínseco implica también que no podría ser percibida por los supuestos habitantes bidimensionales que vivieran sobre la superficie.

En contraste, la curvatura de Gauss es una cantidad geométrica *intrínseca*, es decir, no depende de cómo la superficie está metida en el espacio ambiente, sino que únicamente depende de la geometría propia de la superficie. La redacción original de Gauss de esta propiedad es un poco diferente, [16, p. 24], [17, p. 20]:

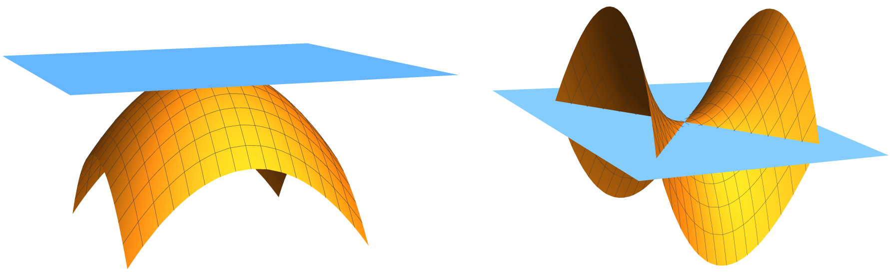
> «Teorema. Si una superficie curvada se desarrolla sobre cualquier otra superficie, la medida de la curvatura en cada punto permanece invariable.»

Y a continuación añade, [16, p. 25], [17, p. 21]:

> «También es evidente que cualquier parte de la superficie curvada conservará la misma curvatura integral después del desarrollo sobre otra superficie.»

Este teorema, conocido en la literatura como el *Theorema Egregium* de Gauss, resulta muy sorprendente, ya que es posible llegar a la curvatura de Gauss, como hemos visto, a través de las secciones normales, de las curvaturas normales y de las curvaturas principales, lo cual es puramente extrínseco. Sin embargo, el *Theorema Egregium* de Gauss nos garantiza que, a pesar de ello, la curvatura de Gauss es una cantidad intrínseca, de manera que un supuesto habitante bidimensional de nuestra superficie podría conocer el valor de dicha curvatura sin necesidad de salir de su mundo bidimensional.

Finalmente, señalemos que el signo de la curvatura de Gauss en un punto P tiene un claro significado geométrico y proporciona información sobre la posición relativa de la superficie con respecto a su plano tangente cerca del punto. En concreto, en los puntos donde la curvatura de Gauss es positiva, $K(P) > 0$, resulta que la superficie, cerca del punto P, se encuentra contenida en uno de los lados determinados por su plano tangente en dicho punto. Tales puntos se llaman *puntos elípticos* (v. figura 14 (a)).

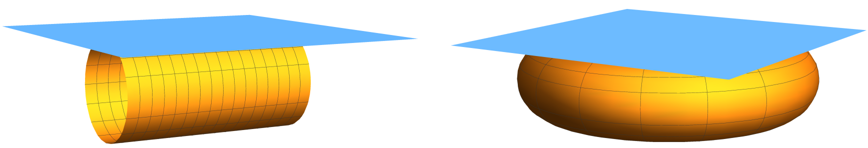


(a) (b)

Figura 14: Puntos elíptico e hiperbólico.

Por el contrario, en los puntos donde la curvatura de Gauss es negativa, $K(P) < 0$, se tiene que la superficie atraviesa el plano tangente, ya que siempre tiene algún trozo cerca del punto P a ambos lados del plano tangente. Estos puntos se llaman *puntos hiperbólicos* o *puntos de silla*, porque la superficie, cerca de ellos, se parece a una silla de montar (v. figura 14 (b)).

Por desgracia, en los puntos donde la curvatura de Gauss se anula, $K(P) = 0$, los llamados *puntos parabólicos*, no podemos decir *a priori* nada sobre esta posición relativa (v. figura 15).



(a) (b)

Figura 15: Puntos planos (en un cilindro y en un toro).

La fórmula de Euler

Como una aplicación del *Theorema Egregium* de Gauss podemos encontrar una de las fórmulas más profundas y complicadas de la geometría diferencial y topología algebraica, el *teorema de Gauss-Bonnet* para superficies. Gauss lo probó para polígonos geodésicos, [16], y **Pierre Ossian Bonnet** (1819–1892) lo extendió para polígonos con lados de curvatura geodésica no nula. No hay una prueba sencilla pero es un resultado imprescindible en un curso estándar de geometría diferencial.

P. O. Bonnet
Fuente: Wikimedia Commons

En el siglo XVIII, Euler probó su famosa fórmula para poliedros. En sus propias palabras, [12, p. 119]:

> «In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et numero hedrarum binario excedit numerum acierum.»

Es decir, «en todo poliedro, la suma del número de ángulos sólidos [vértices] y del número de caras excede en dos al número de aristas», que podemos escribir como

$$V + C = A + 2, \text{ o equivalentemente, } V - A + C = 2,$$

donde V, A y C denotan el número de vértices, aristas y caras del poliedro, respectivamente. Por ejemplo, para los cinco poliedros regulares (*sólidos platónicos*) los datos aparecen en la figura 16.

Poliedro	V	A	C
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

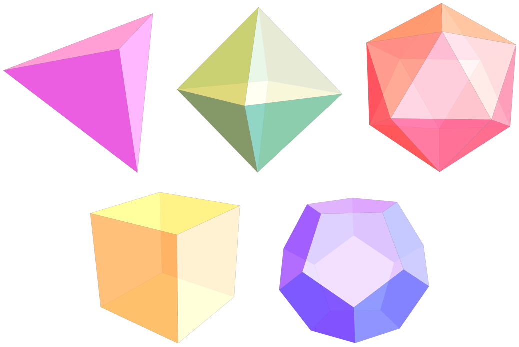


Figura 16: Vértices, aristas y caras de los sólidos platónicos.

A pesar de su sencillez, parece que esta propiedad no era conocida por los matemáticos anteriores. Probablemente, una de las razones es que los matemáticos de épocas previas no eran capaces de razonar sobre propiedades geométricas que no fuesen medibles, es decir, sobre cuestiones topológicas.

El trabajo de Euler fue continuado por **Simon Antoine L'Huilier** (1750–1840), [30], quien observó que la fórmula de Euler era falsa para cuerpos con agujeros (con asas), v. figura 17. Probó que en un cuerpo cerrado con g agujeros se cumple [30, p. 186]

$$V - A + C = 2 - 2g.$$

Este es el primer ejemplo conocido de un invariante topológico.

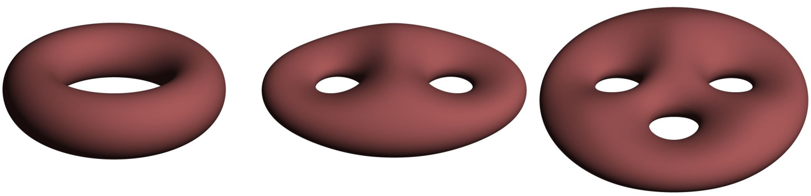


Figura 17: Varias superficies con asas: un toro ($g = 1$), un 2-toro ($g = 2$) y un 3-toro ($g = 3$). Fuente: [33].

Uno de los resultados geométricos más clásicos y sencillos, ya conocido por los antiguos griegos, afirma que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados (o π radianes)[4]. En general, si D es un dominio en una superficie M, cuya frontera ∂D es una curva diferenciable a trozos, su *característica de Euler-Poincaré* $\chi(D) = V - A + C$ puede obtenerse a partir de la *fórmula de Gauss-Bonnet*:

$$\sum_i \varepsilon_i + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \int_D K dA = 2\pi\chi(D),$$

donde el primer sumando es la suma de los ángulos exteriores en los vértices, el segundo es la integral de la curvatura geodésica, y el tercero es la integral de la curvatura de Gauss.

Dos casos particulares de la fórmula anterior son destacables. En primer lugar, para una superficie compacta M la fórmula se reduce a

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

Y en segundo lugar, si D es un triángulo geodésico (es decir, una región simple de la superficie cuya frontera está formada por tres arcos de geodésica) y escribimos $\alpha_i = \pi - \varepsilon_i$ para los ángulos interiores del triángulo, entonces la fórmula puede escribirse como [16, pp. 34–36]

$$\int_D K dA = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi,$$

lo que demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es profundamente dependiente de la curvatura de la superficie, cumpliéndose la igualdad clásica cuando la curvatura $K = 0$ (por ejemplo, cuando D es plano), pero no siendo así en casos más generales.

[4]En los *Elementos* de Euclides ya aparece este resultado, [11]. Concretamente, en la proposición 17 del libro I se prueba que en cualquier triángulo, la suma del cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos, y en la proposición 32 se demuestra que la suma de los tres ángulos del triángulo es, precisamente, dos ángulos rectos. Este resultado caracteriza, en cierto sentido, a la geometría euclídea, y la distingue de las geometrías no euclídeas, como la geometría hiperbólica o la geometría esférica, pues en la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos, mientras que en la geometría esférica dicha suma es superior. El resultado es, de hecho, equivalente al quinto postulado de las paralelas.

Bibliografía

[1] L. J. Alías. *El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante*. Fundación Séneca, Murcia, 2004.

[2] M. Artigas. Nicolás Oresme, Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna. *Príncipe de Viana (Suplemento de ciencias)* **9** (1989), 297–331.

[3] M. Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[4] J. Z. Buchwals, I. B. Cohen. *Isaac Newton's natural philosophy*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2001.

[5] A. C. Clairaut. *Recherches sur les courbes à double courbure*. Chez Nyon, Chez Didot, Chez Quillau, Paris, 1731.

[6] J. L. Coolidge. The unsatisfactory story of curvature. *Amer. Math. Monthly* **59** (1952), 375–379.

[7] A. C. Crombie. *Medieval and early modern science, vol. 2: Science in the later middle ages and early modern times, XIII–XVII centuries*. Oxford University Press, Oxford, 1959.

[8] C. Dupin. *Développements de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux dáblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc*. Mme. Ve. Courcier, Paris, 1813.

[9] Euclides. *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Traducción al español de Rodrigo Zamorano, Sevilla, 1576.

[10] Euclides. *Los seis primeros libros, y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides*. Traducción al español «sobre la

versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella publicada modernamente por Roberto Simson, Profesor de Matemática en la Universidad de Glasgow», Madrid, 1774.

[11] *Euclid's Elements of geometry*. Texto griego de J. L. Heiberg (1883–1885), basado en el texto *Euclidis Elementa, edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, in aedibus B. G. Teubneri, 1883–1885*, editado y traducido al inglés por R. Fitzpatrick, 2008.

[12] L. Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* **4** (1758), 109–140.

[13] L. Euler. Recherches sur la courbure des surfaces. *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin* **16** (1760), 1767, 119–143.

[14] F. Frenet. *Sur les courbes à double courbure*. Tesis Univ. Toulouse, 1847. Resumen en *Journ. de Math. Pures et App.* **17** (1852), 437–447.

[15] A. García Azcárate. Un best-seller del siglo XIX: Los Elementos de Geometría de Legendre. En *Actas del VIII Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 357–367. Universidad de la Rioja, Servicio de publicaciones, 2004.

[16] C. F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Typis Dieterichiants, Gottingae, 1828.

[17] C. F. Gauss. *General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825*. Traducción al inglés con notas y bibliografía de J. C. Morehead y A. M. Hiltebeitel, The Princeton University Library, Princeton, 1902.

[18] S. Germain. *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*. Mme. V. Courcier, Paris, 1821.

[19] S. Germain. *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces*. Huzard-Courcier, Paris, 1826.

[20] S. Germain. Mémoire sur la courbure des surfaces. *J. Reine Angew. Math.* **7** (1831), 1–29.

[21] M. Gromov. Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **61** (1991), 9–123.

[22] F. Joachimsthal. *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung*. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1872.

[23] J. Kepler. *Mysterium Cosmographicum*. Tubinga, 1596. Existe una edición en español, traducida y anotada por Eloy Rada García, *El secreto del Universo*, Alianza Editorial, 2014.

[24] A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley. *Mathematical Masterpieces. Further chronicles by the explorers*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2007.

[25] M. A. Lancret. Mémoire sur les courbes à double courbure. *Mémoires présentés à l'Institut* **1** (1806), 416–454 (presentada en 1802).

[26] M. A. Lancret. Mémoire sur les développoides des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. *Mémoires présentés à l'Institut* **2** (1811), 1–79 (presentada en 1806).

[27] G. Leibniz. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum* 1684. En *Leibnizens Mathematische Schriften* **5**, 220–226, ed. C.I. Gerhardt, Halle, 1858.

[28] G. Leibniz. Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas. *Acta Eruditorum* 1686. En *Leibnizens Mathematische Schriften* **7**, 326–329, ed. C.I. Gerhardt, Halle, 1863.

[29] A. M. Legendre. *Éléments de Géométrie*, edición 12ª. Chez Firmin Didot, Paris, 1823.

[30] S. A. L'Huilier. Mémoire sur la polyédrométrie; contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti (Extrait par M. Gergonne). *Annales de mathématiques pures et appliquées* **3** (1812–1813), 169–189.

[31] F. Meunier. *Essai sur la vie et les ouvrages de Nicole Oresme*. Tesis Univ. Paris, Typographie de Ch. Lahure, Paris, 1857.

[32] J. B. Meusnier. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires de mathématique et de physique* **10** (1785), 477–510.

[33] A. M. Naveira. The Riemann curvature throught history. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.* **99** (2005), 195–210.

[34] I. Newton. *The method of fluxions and infinite series (Methodus fluxionum et serierum infinitorum)*. Henry Woodfall, London, 1736.

[35] N. Oresme. De configurationibus qualitatum et motuum, en *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, traducción inglesa con una introducción y comentarios de Marshall Clagett, The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee and London, 1968.

[36] R. Ossermann. Curvature in the eighties. *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731–756.

[37] H. Pitot. Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloide. *Histoire de l'Académie de Sciences*, 1724, 107–113 (publicado en 1726).

[38] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's Elements*. Traducido al inglés, con introducción y notas, por Glenn R. Morrow, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[39] J. A. Ramírez Cruz. Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme. *Asclepio (Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia)* **LIX** (2007), 23–34.

[40] O. Rodrigues. Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie. En *Correspondance sur l'École Polytechnique* **3** (1814–1816), 162–182, editado por M. Hachette, Chez Mme. Ve. Courcier, Paris, 1816.

[41] B. Russell. The study of mathematics. En *Mysticism and logic, and other essays*, George Allen & Unwin Ltd, London, 1917.

[42] A. J. C. Barré de Saint-Venant. Mémoire sur les lignes courbes non planes. *Journ. Ec. Polyt.* **30** (1846), 1–76 (presentada en 1844).

[43] I. M. Serrano, B. D. Suceava. A medieval mistery, Nicole Oresme's concept of curvitas. *Notices of the AMS* **62**:9 (2015), 1030–1034.

[44] J. A. Serret. Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *Journ. de Math. Pures et Appl.* **16** (1851), 193–207.

[45] P. Serret. *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*. Mallet-Bachelier, Paris, 1860.

[46] D. J. Struik. Outline of a history of differential geometry. Parte I en *Isis* **19** (1933), 92–120; parte II en *Isis* **20** (1933), 161–191.

[47] D. J. Struik. *Lectures on classical Differential Geometry*, 2nd ed. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts, 1961. Reimpresa en 1988 por Dover Publ. Inc., New York. La primera edición fue publicada 1950 por Addison-Wesley Pub. Co., Inc., Reading, Massachusetts.

[48] J. A. Wheeler. *Geometrodynamics*. Academic Press, New York and London, 1962.

Este trabajo ha sido publicado con el patrocinio de la
Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.

Región de Murcia